UNIVERSITETET I OSLO

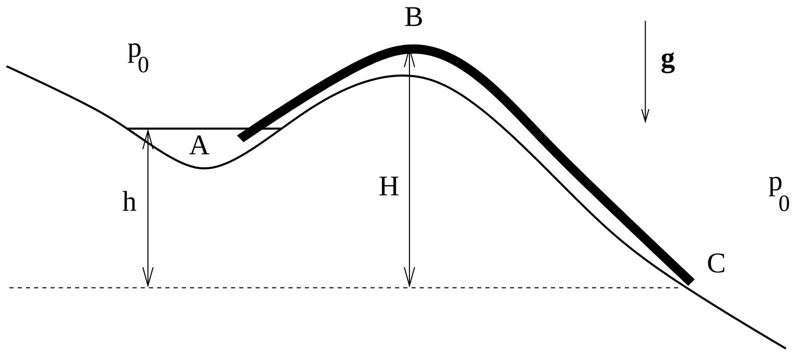
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Fredag 3 juni 2016.
Tid for eksamen:	14:30 – 18:30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1



For å skaffe vann til en landsby (C) er det lagt ut et rør fra en innsjø (A) hvor vannspeilet ligger i konstant høyde h over landsbyen (C) hvor det tappes fra røret. Røret er lagt over et høydedrag (B) og det har vært nødvendig å pumpe vann gjennom røret for å få det til å renne som i en hevert. Høyeste punkt på røret (B) ligger en høyde H over tappestedet (C). I denne oppgaven skal vi anta at lufttrykket er konstant p_0 overalt. Merk at dersom det kommer luft/gass inn i røret vil heverten slutte å virke.

Forklar betingelsene for å kunne bruke Bernoullis likning.

Bestem strømfarten i røret når vi forutsetter stasjonær friksjonsfri strøm og at røret har konstant tverrsnitt.

Bestem en avgrensning på h eller H for at heverten skal fungere.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

La $\{x, y, z\}$ være Kartesiske koordinater med tilhørende enhets koordinatvektorer $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. Vi definerer nye koordinater $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ved følgende formler

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta \\ y &= \alpha - \beta \\ z &= -\gamma \end{aligned}$$

Finn enhets koordinatvektorene $\{\boldsymbol{i}_\alpha, \boldsymbol{i}_\beta, \boldsymbol{i}_\gamma\}$ uttrykt ved de Kartesiske koordinatvektorene.
Undersøk om koordinatene $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ er ortogonale.
Undersøk om de i så fall utgjør et ortogonalt høyrehåndsystem.

Oppgave 3

La z-aksen peke vertikalt oppover. Anta vi har en flat bakke ved $z = 0$ slik at x-aksen peker horisontalt langs bakken. Over bakken blåser en stasjonær vind med hastighetsprofil

$$\boldsymbol{v} = \alpha\sqrt{z}\boldsymbol{i}$$

hvor α er en konstant. Enhets koordinatvektorer i x og z-retning kaller vi som vanlig $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{k}$. Trykket p er konstant p_0 ved bakken, men avtar oppover i høyden. Tettheten ρ er konstant overalt. Tyngdens akselerasjon g er også konstant. Temperaturen T er konstant lik T_0 ved bakken. Ved tiden $t = t_0$ er temperaturen gitt ved et profil

$$T(z, t_0) = (A + Bz)\exp(-\beta z)$$

hvor A og B og β er konstanter. Vi skal anta at ingen av størrelsene hastighet, trykk, tetthet eller temperatur varierer med hensyn på x.

Merk: Denne modellen er fornuftig nær bakken, men blir urealistisk høyt over bakken. Vi skal bruke modellen såpass nært bakken at den er fornuftig. Vi skal ikke bekymre oss for hva som skjer høyt over bakken hvor modellen bryter sammen.

Vi har lært at varme kan transporteres delvis ved konveksjon og delvis ved ledning, med varmeflukstetthet gitt ved

$$\boldsymbol{H} = \rho c \boldsymbol{v} T - k\nabla T.$$

I tillegg har vi lært at varmetransportlikninga er gitt ved

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T.$$

Her er c spesifikk varmekapasitet, k er varmeledningstall og κ er varmediffusivitet.

(Fortsettes på side 3.)

3a

Gjør rede for de fysiske enhetene til $\boldsymbol{v}$ og til konstantene α, β, A og B.

3b

Regn ut divergensen og virvlinga til $\boldsymbol{v}$.

3c

Undersøk om hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$ har en strømfunksjon ψ og finn i så fall strømfunksjonen.
Undersøk om hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$ har et potensial ϕ og finn i så fall potensialet.

3d

Lag et vektor pil-plott for hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$.
Finn strømlinjene til hastighetsfeltet, og tegn inn noen strømlinjer i plottet.

3e

Regn ut den integrerte volumfluksen i strømrøret avgrenset av bakken og en høyde $z = h$.

3f

Finn trykket $p(z)$ som funksjon av den vertikale koordinaten z.
Forklar hvilken likning du bruker for å regne dette ut, og forklar hvorfor du mener at dette er en gyldig framgangsmåte. Svaret må begrunnes!

3g

Kravet om at bakken holder konstant temperatur T_0 kan oversettes til to randkrav for lufttemperaturen, nemlig at både $T = T_0$ og $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$ ved $z = 0$. Bruk dette til å bestemme konstantene A og B i uttrykket for temperaturprofilet ved tiden $t = t_0$.

3h

Finn varmefluksen gjennom bakken ved tiden $t = t_0$. Transporteres det varme fra bakken til lufta eller omvendt?
Regn ut hvordan temperaturen endrer seg i tid ved tidspunktet $t = t_0$ for $z > 0$.

SLUTT