UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Onsdag 5 juni 2019.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Vi skal studere vektorfeltet $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$.

1a

Undersøk om vektorfeltet har en strømfunksjon ψ, og finn i så fall strømfunksjonen.
Undersøk om vektorfeltet har et skalarpotensial ϕ, og finn i så fall potensialet.

1b

Tegn en skisse som viser følgende:

1. Stagnasjonspunkt (hvor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) avmerkes med $\bullet$
2. Vektorfeltet tegnes med piler for å gi en indikasjon på retning og styrke til feltet.
3. Strømlinjer tegnes med heltrukket strek.
4. Dersom skalarpotensialet ϕ eksisterer tegnes ekvipotensialkurver med stiplet strek.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

En stav orientert langs x-aksen er laget av et fast stoff og er varmet opp på en slik måte at temperaturen ved tidspunktet $t = t_0$ er $T(x, t_0) = T_0 e^{-\alpha|x|} + T_1$. Her er T_0, T_1 og α konstanter.
Det vil være en varmefluks i staven bestemt av Fouriers lov som sier at varmeflukstettheten er gitt ved $\boldsymbol{H} = -k\nabla T$ hvor k er varmeledningstallet til stavens materiale.
Temperaturen i staven $T(x, t)$ vil endre seg i henhold til varmelikninga $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$ hvor κ er varmediffusiviteten til stavens materiale.
Regn ut varmeflukstettheten $\boldsymbol{H}$ ved tidspunktet $t = t_0$. Hvilken vei går varmestransporten for $x > 0$ og for $x < 0$?
Regn ut hvordan temperaturen endrer seg ved tidspunktet $t = t_0$. Vil temperaturen øke eller avta for $x > 0$ og for $x < 0$?

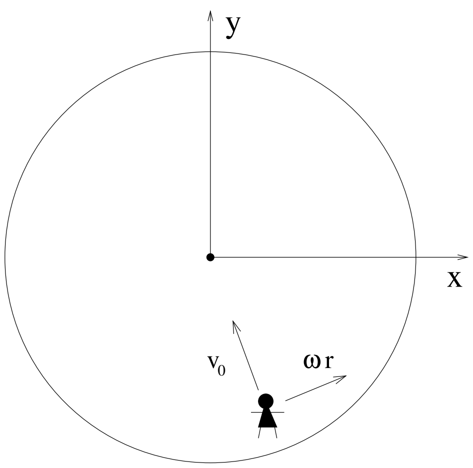
Merk: Du skal ikke regne ut hva som skjer i origo, $x = 0$, ved tidspunktet $t = t_0$.

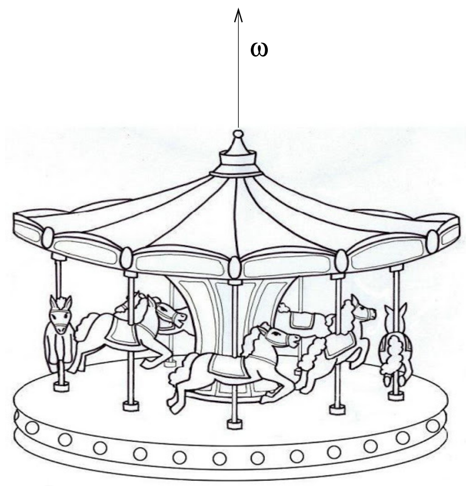
Oppgave 3

En karusell i en fornøyelsespark roterer med konstant vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$ rundt z-aksen. $\boldsymbol{k}$ er enhetsvektor i z-retning og peker oppover, xy-planet er horisontalt, r er radiell horisontal avstand fra omdreiningsaksen, θ er vinkelen i xy-planet slik at $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.
En person på karusellen flytter seg innover mot sentrum med konstant fart v_0 i radiell retning, samtidig som hun roterer med karusellens bevegelse i vinkelretning, hun beveger seg derfor i henhold til hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \omega r \boldsymbol{i}_\theta - v_0 \boldsymbol{i}_r$$

hvor $\boldsymbol{i}_r$ er enhetsvektor i radiell retning og $\boldsymbol{i}_\theta$ er enhetsvektor i vinkelretning.





Illustrasjon fra `http://www.imagui.com/a/dibujo-de-feria-iRRjA8xLx`

(Fortsettes på side 3.)

Merk: Dersom du prøver dette på en karusell som roterer fritt vil du oppleve at vinkelhastigheten øker. I denne oppgaven antar vi derimot at karusellen ikke roterer fritt, men er styrt av en motor, slik at vinkelhastigheten holdes konstant!

I følgende deloppgaver ønsker vi svarene presentert i sylinderkoordinater:

3a

Regn ut divergensen til $\boldsymbol{v}$.

3b

Regn ut virvlinga til $\boldsymbol{v}$.

3c

Undersøk om hastighetsfeltet har en strømfunksjon ψ.
Finn strømlinjene.
Skisser strømlinjene.

3d

Regn ut akselerasjonen til personen ved å regne ut den partikkelderiverte av hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$.

3e

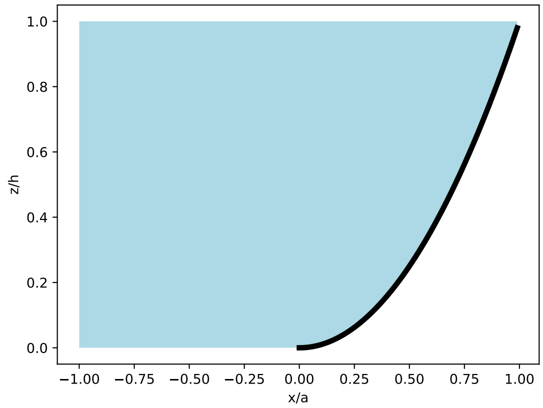
Regn ut sirkulasjonen av $\boldsymbol{v}$ rundt en sirkel med radius $r = R$ rundt rotasjonsaksen. Gjør utregningen direkte som et kurveintegral.
Undersøk om du kan komme fram til samme svar ved hjelp av et flateintegral ved å anvende en passende integralsats. Hva heter integralsatsen?

3f

Regn ut den integrerte fluksen av $\boldsymbol{v}$ ut av et sylinderskall med radius $r = R$ rundt rotasjonsaksen og med høyde h i z-retning. Gjør utregningen direkte som et flateintegral.
Undersøk om du kan komme fram til samme svar ved hjelp av et volumintegral ved å anvende en passende integralsats. Hva heter integralsatsen?

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4



Figuren viser en demning (tykk kurve). Til venstre for demningen er det vann i et reservoar (mørk farge). Til høyre for demningen er det luft (lys farge). Demningen har parabolsk tverrsnitt, $z = h\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$, hvor den horisontale koordinaten x er orientert vekk fra vannreservoaret, den vertikale koordinaten z er orientert oppover, og den horisontale koordinaten på tvers er y. Demningen kan beskrives ved posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ hvor koordinatene er avgrenset av $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ og $0 \leq z \leq h$. Bunnen er ved $z = 0$, og toppen (vannoverflaten) er ved $z = h$. Figuren viser et snitt gjennom demningen for fastholdt y-koordinat.
I lufta er trykket konstant $p = p_0$. Vannet i demningen har hydrostatisk trykk $p = p_0 - \rho g(z - h)$ hvor ρ er tettheten til vann og g er tyngdens akselerasjon. Ved vannoverflaten $z = h$ er altså vanntrykket lik lufttrykket $p = p_0$.

Regn ut den integrerte trykkraften som virker fra vannet på demningen.

Hint: Start med å beskrive demningen ved en passende parameterisering. Finn deretter et uttrykk for normalvektoren og det infinitesimale flateelementet til demningen.

SLUTT