UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MEK1100 — Feltteori og Vektoranalyse
Eksamensdag:	5 juni 2023
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelark, 2 sider
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Vi har gitt to vektorfelt

$$\boldsymbol{u} = y\boldsymbol{i} + \cos z\boldsymbol{j} + xy^2\boldsymbol{k}, \tag{1}$$
$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

der $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{k}$ er enhetsvektorer i et Kartesisk koordinatsystem for henholdsvis x, y og z retningene.

1a

Finn divergensen til vektorfeltene $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$.

1b

Finn virvlingen til vektorfeltene $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$.

1c

Diskuter om $\boldsymbol{u}$ eller $\boldsymbol{v}$ kan skrives som gradienten av et potensial, ϕ_u eller ϕ_v, og finn i så fall potensialet.

Diskuter om $\boldsymbol{u}$ eller $\boldsymbol{v}$ kan skrives ved hjelp av en strømfunksjon, ψ_u eller ψ_v, og finn i så fall strømfunksjonen.

(Fortsettes på side 2.)

1d

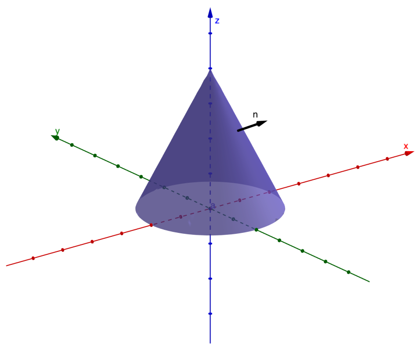
Regn ut sirkulasjonen til $\boldsymbol{u}$ rundt en sirkel med radius a, med sentrum i origo, som ligger i xy-planet. Bekreft svaret ved hjelp av Stokes' sats. (Hint: $\sin^2\theta = 0.5(1-\cos 2\theta)$.)

1e

Finn den konvektive størrelsen $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$.

Oppgave 2

En kjegle med volum $V = \pi h a^2/3$ har grunnflate med radius a i xy-planet og høyde h langs z-aksen. Vi deler overflaten til kjeglen inn i to flater, der G representerer grunnflaten og S representerer resten. Over hele kjeglen sin overflate er det definert en enhetsflatenormalvektor $\boldsymbol{n}$ som peker utover.



2a

Gitt et vektorfelt $\boldsymbol{u} = (x+y)\boldsymbol{i} + \cos z\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Finn fluksen

$$\int_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma, \tag{3}$$

der $d\sigma$ er et flateelement.

2b

Kjeglen sin overflate for $z>0$ kan beskrives ved ekviskalarflaten

$$\beta(x,y,z) = x^2 + y^2 - \left(\frac{h-z}{a}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Finn enhetsflatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ for hele kjeglen.

Oppgave 3

Et krumlinjet koordinatsystem med koordinater u, v, θ er beskrevet gjennom posisjonsvektoren

$$\boldsymbol{r} = uv\cos\theta\boldsymbol{i} + uv\sin\theta\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}(v^2-u^2)\boldsymbol{k}, \tag{5}$$

der $u\ge 0$, $v\ge 0$ og $0\le\theta\le 2\pi$.

(Fortsettes på side 3.)

3a

Finn de tre skaleringsfaktorene. Undersøk om de krumlinjede koordinatene er ortogonale. Finn volumelementet for de krumlinjede koordinatene.

3b

Gitt et vilkårlig skalarfelt f og et vilkårlig vektorfelt $\boldsymbol{v}$. Gi ∇f og $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ i krumlinjede koordinater. Du kan her bruke skaleringsfaktorene i uttrykkene.

Oppgave 4

Vi definerer en funksjon

$$B(x, y, z) = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \frac{P}{\rho} + gz, \tag{6}$$

der $\boldsymbol{v}$ er hastighetsfeltet, P er trykkfeltet, ρ er en konstant tetthet og g er tyngdeakselerasjonskonstanten for tyngden som virker i negativ z-retning. Vi antar videre stasjonær strømning av et ideelt, virvelfritt fluid i et vilkårlig (sammenhengende) domene og får oppgitt at $B(x_0, y_0, z_0) = B_0$, der B_0 er en konstant og (x_0, y_0, z_0) er et punkt i det vilkårlige domenet. Hva er $B(x_1, y_1, z_1)$ når også punktet (x_1, y_1, z_1) ligger i samme domene? Begrunn svaret.