Løsningsforslag

Eksamen MEK1100 8/6-2022

Oppgave 1

a) $$\nabla\cdot\vec{v}_1 = \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial z} = \underline{\underline{0}}$$

$$\nabla\cdot\vec{v}_2 = \frac{\partial xz}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial x^2}{\partial z}} = \underline{\underline{z}}$$

For begge vektorfelt er

$$\nabla\times\vec{v} = \mathbf{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

siden begge vektorfelt ligger i xz-planet. Vi får

$$\nabla\times\vec{v}_1 = \mathbf{j}\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial(-z)}{\partial x}\right) = \underline{\underline{\vec{0}}}$$

$$\nabla\times\vec{v}_2 = \mathbf{j}\left(\frac{\partial xz}{\partial z} - \frac{\partial x^2}{\partial x}\right) = \underline{\underline{-\mathbf{j}x}}$$

b) $\vec{v}_1$ har et hastighetspotensial siden virvlingen er null.
$\vec{v}_2$ har <u>ikke</u> et hastighetspotensial siden virvlingen <u>ikke</u> er null.
$\vec{v}_1$ har strømfunksjon siden

feltet er divergensfritt.
$\vec{v}_2$ har ikke en strømfunksjon siden $\nabla \cdot \vec{v}_2 \neq 0$.

$\nabla \phi = \vec{v}_1$ gir oss

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -z$$

Denne gir oss at $\phi = \phi(x, z)$, men det visste vi jo egentlig siden $\vec{v}_1$ ligger i xz-planet.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}x^2 + f(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -z \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}x^2 + f\right) = -z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -z$$

$$f = -\frac{1}{2}z^2 + C$$

Vilkårlig konstant

$$\underline{\underline{\phi = \frac{1}{2}(x^2 - z^2) + C}}$$

Strømfunksjon:

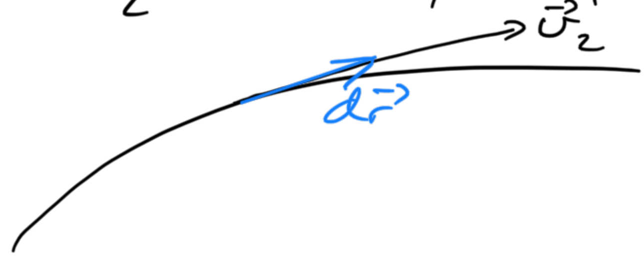
$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} = x \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -z$$

$$\psi = -xz + f(x) \qquad\qquad \psi = -zx + g(z)$$

For at disse to uttrykkene skal være like, så må $f = g$. Da må f og g være konst.

$$\Rightarrow \underline{\underline{\psi = -xz + C}}$$

Strømlinjene til $\vec{v}_2$ finnes ved at $d\vec{r} \times \vec{v}_2 = \vec{0}$, i.e., $d\vec{r} \parallel \vec{v}_2$



$$d\vec{r} = dx\,\mathbf{i} + dz\,\mathbf{k}$$

$$d\vec{r} \times \vec{v}_2 = \mathbf{j}\left(xz\,dz - x^2 dx\right) = \vec{0}$$

$$\left(xz\,dz - x^2 dx = 0\right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$z\,dz - x\,dx = 0$$

$$z\,dz = x\,dx$$

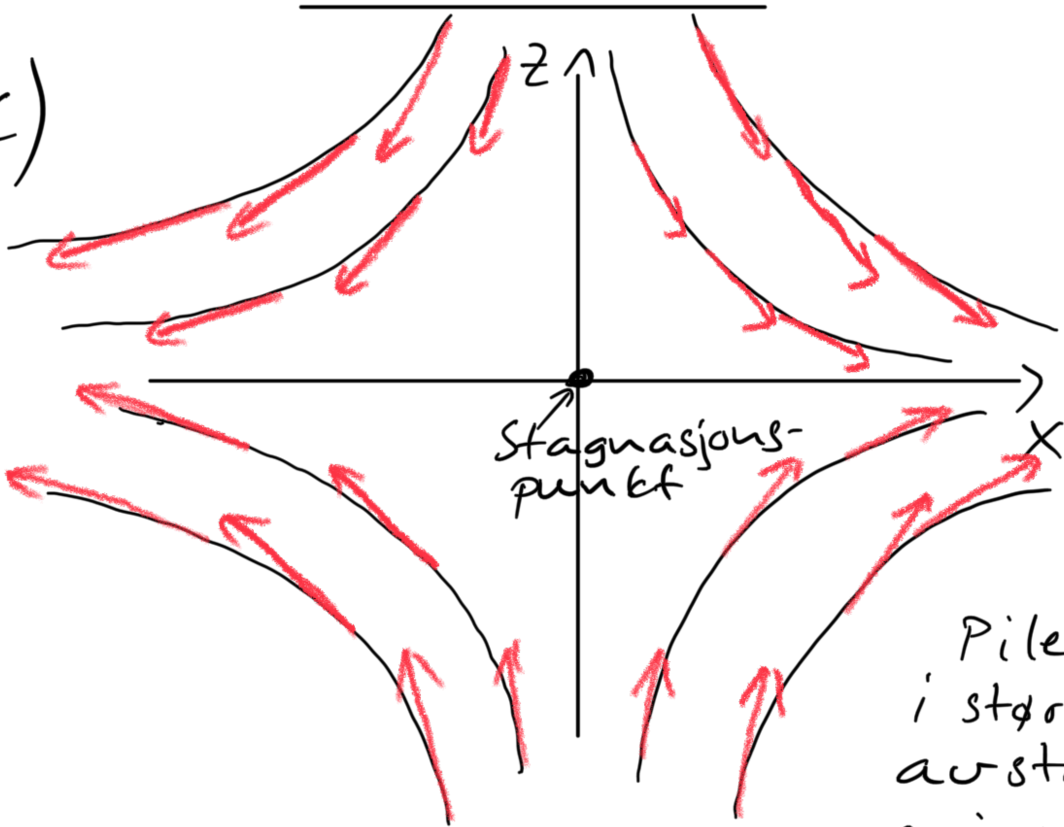
Integrer og finner

$$\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Siden konstanten C er vilkårlig kan vi skrive ($C^* = 2C$)

$$\underline{\underline{z^2 - x^2 = C^*}}$$

c)



Pilene vokser i størrelse med avstand fra origo.

Speilvendt om aksene.

Se stagnasjonsstrøm (9.4.2) i Gjevik.

Oppgave 2

a) Stoke's sats sier at for et vilkårlig vektorfelt (differensierbart) $\vec{v}$ så har man at

$$\int_S \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

der C er en lukket kurve rundt flaten S.

$\vec{n}$ er enhetsflatenormal til S

$\in$ Høyrehånd

$d\sigma$ er flateelement

$d\vec{r}$ er kurveelement (bueelement) langs C.

b) Denne kan løses både med Stoke's sats og direkte regning.

Stoke's sats:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & c \end{vmatrix}$$

$$= \mathbb{i}\left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \omega x}{\partial z}\right) + \mathbb{j}\left(\frac{\partial -\omega y}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right)$$

$$+ \mathbb{k}\left(\frac{\partial \omega x}{\partial x} - \frac{\partial -\omega y}{\partial y}\right)$$

$$= \underline{2\omega \mathbb{k}}$$

1) xy-planet har $\mathbb{k}$ som flatenormal

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S 2\omega \mathbb{k} \cdot \mathbb{k} \, d\sigma$$

$$= 2\omega \int_S d\sigma$$

$$= \underline{\underline{2\omega \pi a^2}}$$

Merk at retningen på sirkulasjonen <u>ikke</u> er gitt, så motsatt fortegn er også riktig.

2) xz-planet har $\vec{n} = \mathbb{j}$

Siden $\nabla \times \vec{v} \cdot \mathbb{j} = 0$ så blir

sirkulasjonen Ö.

Direkte regning:

1) Sirkel parametriseres ved

$$\vec{r}(\theta) = a\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\theta\,\mathbf{j}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\vec{v} = -wy\,\mathbf{i} + wx\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$$

$$\vec{v} = -wa\sin\theta\,\mathbf{i} + wa\cos\theta\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -a\sin\theta\,\mathbf{i} + a\cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-wa\sin\theta\,\mathbf{i} + wa\cos\theta\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k})\cdot(-a\sin\theta\,\mathbf{i} + a\cos\theta\,\mathbf{j})\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} wa^2\sin^2\theta + wa^2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \omega a^2 \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\left(\int_{2\pi}^{0}\right)$$

$$= \underline{\underline{2\omega\pi a^2}}$$

(Motsatt retning gir motsatt fortegn)

2) $\vec{r} = a\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\theta\,\mathbf{k}$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -a\sin\theta\,\mathbf{i} + a\cos\theta\,\mathbf{k}$$

$$\vec{v} = \omega a\cos\theta\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$$

$$\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\theta} = ca\cos\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} ca\cos\theta\,d\theta = \underline{\underline{0}}$$

c) $\vec{v}\cdot\nabla = (-\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k})\cdot\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$

$$= -\omega y\frac{\partial}{\partial x} + \omega x\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\omega y\frac{\partial}{\partial x}(-\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k})$$

$$+ \omega x\frac{\partial}{\partial y}(-\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k})$$

$$+ c\frac{\partial}{\partial z}\left(-\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j} + c\mathbf{k}\right)$$

$$= -\omega y\,\omega\mathbf{j} + \omega x(-\omega)\mathbf{i}$$

$$= \underline{\underline{-\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})}}$$

d) Volumstrøm $= \int_A \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma$

der A = Tverrsnittsarealet

$\vec{n}$ = Flatenormal til A

$d\sigma$ = Flateelement

$$\int_A \vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_A(-\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j} + c\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\,d\sigma$$

$$= c\int_A d\sigma$$

$$= \underline{\underline{c\pi a^2}}$$

e) Euler's likning

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g k$$

der ρ = massetetthet

g = Tyngdeakselerasjon

Siden $\vec{v}$ ikke er funksjon av tid faller første ledd. Sett inn for konveksjonen og finner p slik at

$$-\omega^2 (x i + y j) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g k$$

Dette gir tre likninger

1) $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \omega^2 x$

2) $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \omega^2 y$

3) $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g$

3) gir $p = -\rho g z + h(x, y)$

2) gir videre $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} = \rho \omega^2 y$

$$h = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 + f(x)$$

1) gir videre $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \rho\omega^2 x$

$$f = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + C$$

Til sammen får vi

$$\underline{\underline{P(x,y,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2) - \rho g z + C}}$$

Oppgave 3

Skaleringsfaktorer:

$$h_u = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| = \left|u\mathbf{i} + v\mathbf{j}\right| = \underline{\underline{\sqrt{u^2+v^2}}} = h$$

$$h_v = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = \left|-v\mathbf{i} + u\mathbf{j}\right| = \underline{\underline{\sqrt{u^2+v^2}}} = h$$

$$h_w = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right| = \left|1\mathbf{k}\right| = \underline{\underline{1}}$$

Enhetsvektorer:

$$\vec{e}_u = \frac{1}{h}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{1}{h}(u\mathbf{i} + v\mathbf{j})$$

$$\vec{e}_v = \frac{1}{h}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{1}{h}(-v\mathbf{i} + u\mathbf{j})$$

$$\vec{e}_w = \mathbf{k}$$

Har at $\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = \frac{1}{h^2}(-uv + uv) = 0$

$\vec{e}_u \cdot \vec{e}_w = 0$

$\vec{e}_v \cdot \vec{e}_w = 0$

så de krumlinjede koordinatene er ortogonale.

Volumelementet er

$$dV = h_u h_v h_w \, du\,dv\,dw$$

$$= (u^2 + v^2)\, du\,dv\,dw$$

Oppgave 4

$Q = \oint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ representerer vektorfluksen av vektoren $\vec{v}$ gjennom flaten

S. Hvis $\vec{v}$ representerer strøm-hastighet, så representerer Q volumstrømmen per tidsenhet gjennom flaten S.

Integralet er et flateintegral gjennom en <u>lukket</u> flate S.

Kalles også volumfluks.

Vi kan se på Q som en netto utstrømning hvis $Q > 0$, og netto innstrømning hvis $Q < 0$.

Gitt at $\vec{v} = \vec{a}p$, der $\vec{a}$ er en konstant vektor. Da er

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \vec{a}p = \vec{a} \cdot \nabla p$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{a}p \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot p\vec{n}$$

Setter inn i Gauss' sats

$$\int_V \vec{a} \cdot \nabla p \, dV = \oint_S \vec{a} \cdot p \vec{n} \, dS$$

Flytter konstant $\vec{a}$ utenfor integralene

$$\vec{a} \cdot \left(\int_V \nabla p \, dV - \oint_S p \vec{n} \, dS \right) = 0$$

hvilket betyr at uttrykket i parantes må være lik 0, og dermed

$$\Rightarrow \underline{\underline{\int_V \nabla p \, dV = \oint_S p \vec{n} \, dS}}$$

siden $\vec{a}$ er vilkårlig konstant vektor.