UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Fredag 29 mai 2009.
Tid for eksamen:	14:30 – 17:30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 24%)

1a (vekt 12%)

Et todimensjonalt hastighetsfelt er gitt som

$$\mathbf{v} = u_0 e^{kx}(\sin(ky)\mathbf{i} + \cos(ky)\mathbf{j}),$$

der k og u_0 er konstanter. Regn ut divergensen til $\mathbf{v}$ og avgjør om det eksisterer en strømfunksjon. Finn strømfunksjonen dersom den eksisterer.

1b (vekt 12%)

Et strømfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = A\left[\,(x^3 - 3axy^2)\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j}\,\right],$$

der A er en gitt konstant. Bestem konstanten a og hastighetskomponenten v_y slik at det eksisterer både en strømfunksjon og et hastighetspotensial.

Oppgave 2 (vekt 20%)

En flate, σ, er parameterisert ved x og y slik at

$$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + cxy\mathbf{k},$$

der $0 < x < a$ og $0 < y < b$. Et hastighetsfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = \alpha x\mathbf{i} + \alpha y\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}.$$

2a (vekt 4%)

Parameterisering og hastighetsfelt er gitt med benevninger. Finn benevningen på konstantene c, α og γ.

(Fortsettes på side 2.)

2b (vekt 16%)

Beregn fluksen

$$\int_\sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

der fortegnet på $\mathbf{n}$ er valgt slik at $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0$. Vis at svaret har riktig benevning.

Oppgave 3 (vekt 20%)

For et fast stoff kan vi se bort fra konvektiv (advektiv) varmestranport ($\mathbf{H}_s = 0$) slik at varme bare transporteres ved ledning. Videre antar vi at det ikke er varmekilder ($q = 0$) og at energitettheten pr. masse kan skrives $E = cT$, der c (varmekapasiteten) er konstant. Dette betyr at innholdet av termisk energi i et volumelement $d\tau$ er $\rho c T d\tau$, der ρ er massetettheten til det faste stoffet. Utled varmeledningslikningen for dette forenklede tilfellet.

Oppgave 4 (vekt 36%)

Vi har en todimensjonal strømning i en inkompressibel og friksjonsfri væske. I polarkoordinater er en punktkilde gitt ved hastighetspotensialet

$$\phi = A \ln\left(\frac{r}{R}\right),$$

der r er avstanden til origo og A og R er positive konstanter.

4a (vekt 12%)

Angi hva slags benevning A og R må ha og finn hastighetsvektoren. Finn også den totale volumutstrømningen fra kilden.

4b (vekt 12%)

Finn trykket i væska når trykket uendelig langt borte fra punktkilden ($r \to \infty$) er lik p_∞. Bestem den minste verdien av r (uttrykt ved p_∞, A etc.) der strømningstilstanden (hastighet og trykk) kan være fysisk meningsfull.

4c (vekt 12%)

Vi betrakter en væskepartikkel som ved $t = 0$ befinner seg i posisjonen som svarer til $r = r_0$ og $\theta = \theta_0$. Finn posisjonen av denne partikkelen for $t > 0$.

— *Slutt* —