Fasit for eksamen i MEK1100 gitt 10 juni 2011

Oppgave 1

1a Hastighetsfeltet har komponenter

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

1b Vi må vise at de to gradientene står normalt på hverandre

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$$

Oppgave 2

2a Regn først ut gradienten

$$\boldsymbol{v}_0 = \nabla\phi_0 = \boldsymbol{i}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{A}{r}\right) = \frac{A}{r^2}\boldsymbol{i}_r$$

Regn deretter ut divergensen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{A}{r^2}\right) = 0$$

Feltet er divergensfritt og er endimensjonalt (som er et spesialtilfelle av å være todimensjonalt) representert i kulekoordinatene, da finnes det en strømfunksjon i denne representasjonen. Feltet er imidlertid fullt tredimensjonalt i xyz-koordinatene og har følgelig ikke en strømfunksjon som kan uttrykkes ved to av disse koordinatene på den vanlige måten i kurset.

2b Feltet $\boldsymbol{v}_0$ er en tredimensjonal kilde. La kontrollflaten være hvilken som helst lukket flate som omslutter origo, f.eks. kuleskallet $r = R$, og "styrken" blir

$$\int_{r=R} \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = 4\pi A$$

"Styrken" er ikke avhengig av formen til kontrollflaten, så lenge den omslutter origo, fordi feltet er divergensfritt utenom origo.

2c

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi = A\frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (z-a)\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}} + A\frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (z+a)\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+(z+a)^2)^{3/2}}$$

Et stagnasjonspunkt er karakterisert av at $\boldsymbol{v} = 0$. Sett inn $x = y = z = 0$ og finn at dette er et stagnasjonspunkt.

En strømlinje er løsning av differensiallikninga $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$. Dersom vi setter inn $x = y = 0$ for å være på z-aksen har vi at

$$\boldsymbol{v} = A\frac{(z-a)\boldsymbol{k}}{(z-a)^3} + A\frac{(z+a)\boldsymbol{k}}{(z+a)^3}$$

og $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$. Og ettersom $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$ ser vi at z-aksen er en strømlinje.

2d

$$\int_{r=2a} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{r=2a} \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}-a\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma + \int_{r=2a} \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = 4\pi A + 4\pi A = 8\pi A$$

Vi har benyttet oss av at fluksintegralet for hver av de forskjøvete feltene $\boldsymbol{v}_0$ er identisk med "styrke"-integralet i punkt 2b.

Oppgave 3

3a Bevaring av fluks ved øvre og nedre kant

$$u\pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = U\pi\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2$$

3b

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konstant langs en strømlinje}$$

Dette gjelder for

- friksjonsfri strømning
- stasjonær strømning
- konstant tetthet eller inkompressibelt fluid

3c Benytt Bernoullis likning for øvre og nedre kant

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{u^2}{2}$$

Sett inn sammenhengen mellom u og U, og få volumfluks

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2gH}{\frac{1}{\delta^4} - \frac{1}{\Delta^4}}}$$

Dersom H økes vil fluksen også øke.

3d Benytt Bernoullis likning for nedre kant og et vilkårlig sted i høyde h over nedre kant

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gh$$

Vi får at $p = p_0 - \rho gh$. Deretter får vi

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = p\boldsymbol{i}_r\mathrm{d}\sigma - p_0\boldsymbol{i}_r\mathrm{d}\sigma = -\rho gh\boldsymbol{i}_r\mathrm{d}\sigma$$

Man kan eventuelt skrive $\mathrm{d}\sigma = \frac{\delta}{2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

Traktveggen presses inn mellom A og B.