Fasit for avsluttende eksamen i MEK1100 gitt 3 juni 2016

Oppgave 1

Bernoullis likning forutsetter ideelt fluid (ingen friksjon), stasjonært hastighetsfelt, og konstant tetthet (det går an å generalisere til inkompressibelt fluid, men det er ikke nødvendig her). I så fall er uttrykket $\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$ konstant langs en strømlinje. Her er p trykk, ρ tetthet, v strømfart, g tyngdens akselerasjon, og z er koordinat langs den vertikale aksen. Dersom hastighetsfeltet er virvelfritt så er $\mathcal{B}$ konstant overalt uavhengig av strømlinjer.

Legg en strømlinje fra den frie overflaten i innsjøen (A) til tappepunktet i landsbyen (C). Trykket i begge ender er p_0. Strømfarten er null i overflaten til innsjøen. Vi får $gh = \frac{v^2}{2}$ som gir $v = \sqrt{2gh}$.

På høydedraget (B) er trykket p_B og strømfarten er den samme som ved tappepunktet (C). Vi får $\frac{p_B}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gH = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v^2}{2}$ som gir $p_B = p_0 - \rho g H$. Dersom trykket i røret blir lavere enn damptrykket til vann p_D så vil vannet koke og det vil danne seg luftbobler som hindrer heverten å virke, følgelig har vi kravet $H < \frac{p_0 - p_D}{\rho g}$. Det aksepteres fullt ut å gi svaret som $H < \frac{p_0}{\rho g}$.

Oppgave 2

$$\boldsymbol{i}_\alpha = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \frac{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = -\boldsymbol{k}$$

Ortogonalt og høyrehåndsystem.

Oppgave 3

3a Uttrykt ved enhetene m for lengde, s for tid, og K for temperatur:

$$\boldsymbol{v} \sim \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad \alpha \sim \frac{\sqrt{\mathrm{m}}}{\mathrm{s}}, \qquad \beta \sim \frac{1}{\mathrm{m}}, \qquad A \sim \mathrm{K}, \qquad B \sim \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$$

I denne deloppgaven aksepteres det fullt ut å bruke andre enheter for lengde, tid og temperatur.

3b Divergens $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Virvling $\nabla \times \boldsymbol{v} = \dfrac{\boldsymbol{j}\alpha}{2\sqrt{z}}$

3c Feltet har ikke et potensial fordi det ikke er virvelfritt.

Feltet har en strømfunksjon fordi det er divergensfritt og todimensjonalt,

$$\psi = -\frac{2}{3}\alpha z^{\frac{3}{2}} + C$$

hvor C er en vilkårlig konstant.

Det aksepteres fullt ut at svaret har motsatt fortegn, det kommer an på hvordan strømfunksjonen er definert.

3d Strømlinjene er rette linjer parallelle med x-aksen.

3e Regn ut enten ved å bruke strømfunksjonen eller ved å integrere

$$\int_0^h \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i} \, \mathrm{d}z = \psi(0) - \psi(h) = \frac{2}{3}\alpha h^{\frac{3}{2}}$$

3f Ettersom lufta ikke står i ro kan vi i utgangspunktet ikke anta at den hydrostatiske formelen gjelder.

La oss anta at fluidet (lufta) er ideelt, det vil si at det ikke er friksjonskrefter eller viskositet. I så fall er vilkårene for Bernoullis likning oppfylt: Ideelt fluid, konstant tetthet og stasjonært hastighetsfelt.

Ettersom virvlinga er ulik null, og hver strømlinje har konstant verdi for z, så kan vi ikke bruke Bernoullis likning for å finne ut noe om trykket på tvers av forskjellige verdier for z. Bernoullis likning forteller oss derfor ikke hvordan trykket varierer som funksjon av z.

Vi bruker derfor Eulers likning. Vi vet at $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ er null fordi hastighetsfeltet er stasjonært. Vis at hastighetsprofilet $\boldsymbol{v} = \alpha\sqrt{z}\boldsymbol{i}$ medfører at $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$ er lik null! Det som står igjen av Eulers likning er da $0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{k}$. Sammen med randkravet $p = p_0$ ved $z = 0$ får vi

$$p = p_0 - \rho g z.$$

Det er ganske utrolig at formelen for hydrostatisk trykk gjelder selv om fluidet ikke står i ro!

Dette etterspørres ikke i oppgaven, men er interessant å merke seg: Grunnen til at vindhastigheten over bakken har et profil av typen $\boldsymbol{v} = \alpha\sqrt{z}\boldsymbol{i}$ er fordi det er friksjonskrefter som virker i lufta over bakken. Hvorfor kan vi da rettferdiggjøre at lufta kan betraktes som et ideelt fluid? La oss undersøke dette ved å se på Navier–Stokes likning som nettopp er generaliseringen av Eulers likning til viskøse fluider. Se enten på første likning i Appendix A.2 i Gjevik & Fagerland, eller se på likning (8.28) i Matthews:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \kappa \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} - g\boldsymbol{k}$$

Dersom vi setter inn $\boldsymbol{v} = \alpha\sqrt{z}\boldsymbol{i}$ og antar α er en konstant, så får vi

$$\nabla p = -\frac{\rho\nu\alpha}{4} z^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{i} - \rho g \boldsymbol{k}$$

Legg merke til at på venstre side har vi en gradient, mens på høyre side har vi et uttrykk med virvling ulik null! Følgelig kan vi slå fast at det er noe galt med den opprinnelige antakelsen $\boldsymbol{v} = \alpha\sqrt{z}\boldsymbol{i}$ med α konstant. I praksis viser det seg at vindprofiler av denne typen utvikler seg langsomt i x-retning, så det er grunn til å forvente at $\boldsymbol{v}$ også må være en funksjon av x.

La oss likevel gjøre følgende betraktning: Viskositetskoeffisienten ν er omtrent lik $1.41 \cdot 10^{-5}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ for tørr luft ved $10°\mathrm{C}$. Tyngdens akselerasjon er $g = 9.81\mathrm{m/s}^2$. Forholdstallet mellom de to leddene i uttrykket for trykkgradienten er $\frac{\rho\nu\alpha}{4}z^{-\frac{3}{2}}/(\rho g) = \frac{\nu\alpha}{4g}z^{-\frac{3}{2}}$ og dette er typisk et meget lite tall dersom vi ikke er like over bakken. For eksempel, dersom $\alpha = 1\mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$ og $z = 1\mathrm{m}$ så er forholdstallet $3.6 \cdot 10^{-7}$. Det er derfor en fabelaktig god tilnærming å anta ideelt fluid, og si $\nabla p = -\rho g \boldsymbol{k}$, så lenge man ikke befinner seg like over bakken.

3g Kravet $T = T_0$ ved $z = 0$ gir $A = T_0$.

Kravet $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ved $z = 0$ kan håndteres ved å bruke varmestransportlikninga

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$$

Det konvektive leddet er lik null ved bakken. Det ser vi enten ved å benytte at $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ ved bakken, eller ved å se at dersom $\boldsymbol{v}$ er horisontal og T kun er funksjon av z, så blir resultatet i begge tilfeller at det konvektive leddet er lik null ved bakken!

Da får vi $\kappa\nabla^2 T = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ som gir oss $(-2\beta B + \beta^2 A) = 0$, og følgelig $B = \frac{1}{2}\beta T_0$.

3h Fra uttrykket for varmefluksstetthet innsatt $z = 0$ og $t = t_0$ har vi

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}k\beta T_0\boldsymbol{k}$$

som betyr at varmefluksen går fra bakken til lufta.

Hvorfor er det ikke nødvendig å integrere opp flukstettheten i et flateintegral på bakken? Ifølge den opprinnelige definisjonen av "fluks" gitt av James Clerk Maxwell må vektoren $\boldsymbol{H}$ oppfattes både som en fluks og en flukstetthet, les det utmerkede avsnittet om terminologi her: `https://en.wikipedia.org/wiki/Flux`

Fra varmelikninga har vi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{2}\kappa\beta^3 T_0 z\exp(-\beta z)$$

som er null for $z = 0$ og positiv for $z > 0$. Følgelig vil temperaturen øke over bakken ved $t = t_0$.

Dette etterspørres ikke i oppgaven, men er interessant å merke seg: Økningen i temperatur er null ved bakken og går mot null uendelig høyt over bakken. Økningen er maksimum i høyden $z = 1/\beta$.