Fasit for deleksamen i MEK1100 gitt 15 mars 2016

Oppgave 1

1a $[\alpha] =$°C/m, $[\beta] =$°C/m^2

1b $\nabla T = \alpha \boldsymbol{i} + 2\beta y \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \nabla T \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\alpha+2\beta y}{\sqrt{2}}$

1c Ett mulig svar er $T^* = x^* + (y^*)^2$ hvor $T^* = \frac{T-T_0}{T_0}$, $x^* = \frac{\alpha x}{T_0}$ og $y^* = y\sqrt{\frac{\beta}{T_0}}$.

Et annet mulig svar er $T^* = 1+x^*+(y^*)^2$ hvor $T^* = \frac{T}{T_0}$, $x^* = \frac{\alpha x}{T_0}$ og $y^* = y\sqrt{\frac{\beta}{T_0}}$.

Det finnes også mindre attraktive svar, for eksempel $T^* = 1 + \alpha^* x^* + \beta^*(y^*)^2$ hvor $T^* = \frac{T}{T_0}$, $\alpha^* = \frac{\alpha R}{T_0}$, $x^* = \frac{x}{R}$, $\beta^* = \frac{\beta R^2}{T_0}$ og $y^* = \frac{y}{R}$. Dette er mindre attraktivt fordi det var nødvendig å introdusere en ekstra lengde R som ikke naturlig hører hjemme i problemet.

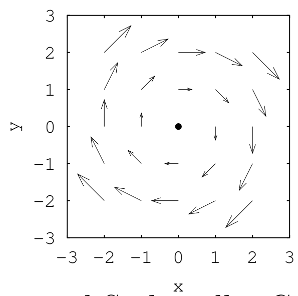
Oppgave 2

2a $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 1$

2b $\nabla \times \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{k}$

2c Det eksisterer ikke et potensial fordi $\boldsymbol{v}$ ikke er virvelfritt.

2d Origo er eneste stagnasjonspunkt.



2e Sirkulasjon $-2\pi R^2$. Kontroller svaret med Stokes eller Green's sats.

2f Fluks 1.

2g Likningene som bestemmer strømlinjene stammer fra $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, som gir skalare likninger

$$-x\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y = 0, \qquad z\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}z = 0, \qquad y\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}x = 0$$

Den tredje differensiallikninga er separabel og har løsning $x^2 + y^2 = r^2$ hvor r er en konstant. Dersom vi nå bruker hintet og setter $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ så ser vi at de to første differensiallikningene reduserer til samme likning $z\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}z = 0$ som er separabel og som har løsning $z = A\exp(-\theta)$ for en konstant A.

Strømlinjene for $z = 0$ er sirkler rundt origo. Strømlinjene for $z \neq 0$ er spiraler med konstant avstand fra z-aksen og med endring av z-verdi med faktor $\exp(-2\pi)$ for hver omdreining.