MEK1100
Feltteori og vektoranalyse

Løsningsforslag

Opprinnelig laget av
Morten Wang Fagerland
våren 2005

Rettinger og oppdateringer for nye versjoner av kompendiet ved
Karsten Trulsen
2012, 2013, 2014, 2015, 2016

Takk til studenter, gruppelærere og kolleger for gode tilbakemeldinger!

Seksjon for mekanikk
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo
2016

Innhold

Kapittel 1

Felt i naturen, skalar- og vektorfelt, skalering

Oppgave 1

To vektorer $\boldsymbol{u}$ og $\boldsymbol{v}$ er parallelle hvis vi kan skrive $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{v}$, der c er en skalar.

$$2\boldsymbol{a} - \frac{1}{6}\boldsymbol{b} = c\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{a}\right)$$

$$\boldsymbol{a}(2 + 3c) + \boldsymbol{b}\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{4}c\right) = 0.$$

Dette gir to likninger for c. For å få en entydig løsning må begge likningen gi samme verdi.

$$\begin{array}{rcr} 2 + 3c = 0 & \quad \text{og} \quad & -\frac{1}{6} - \frac{1}{4}c = 0 \\ c = -\frac{2}{3} & \quad \text{og} \quad & c = -\frac{2}{3}. \end{array}$$

Vektorene er altså parallelle.

Oppgave 2

Gitt vektorene $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ og skalarene α og β.

a) Vis at $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0. \end{aligned}$$

b) Vis at $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ hvis og bare hvis $\boldsymbol{a} = 0$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \cdot (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0. \end{aligned}$$

c) • Vis at $\alpha\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$:

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (\alpha a_1\boldsymbol{i}+\alpha a_2\boldsymbol{j}+\alpha a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\ &= \alpha a_1b_1+\alpha a_2b_2+\alpha a_3b_3\\ &= \alpha(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\ &= \alpha(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

• Vis at $\boldsymbol{a}\cdot\beta\boldsymbol{b}=\beta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\beta\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(\beta b_1\boldsymbol{i}+\beta b_2\boldsymbol{j}+\beta b_3\boldsymbol{k})\\ &= a_1\beta b_1+a_2\beta b_2+a_3\beta b_3\\ &= \beta(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\ &= \beta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

d) • Vis at $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot\Big((b_1+c_1)\boldsymbol{i}+(b_2+c_2)\boldsymbol{j}+(b_3+c_3)\boldsymbol{k}\Big)\\ &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)\\ &= a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3\\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

• Vis at $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= \Big((a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}\Big)\cdot(c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k})\\ &= (a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+(a_3+b_3)c_3\\ &= a_1c_1+b_1c_1+a_2c_2+b_2c_2+a_3c_3+b_3c_3\\ &= a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3+b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3\\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

e) Vis at $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\\ &= b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3\\ &= \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

Oppgave 3

Gitt en partikkelbane $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t$ der $\boldsymbol{r}_0 = \{a, b, c\}$ og $\boldsymbol{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$.

a) Banen på komponentform:

$$\boldsymbol{r}(t) = (a + v_x t)\boldsymbol{i} + (b + v_y t)\boldsymbol{j} + (c + v_z t)\boldsymbol{k}.$$

b) Her kan vi sette $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{j} = \{0, 1, 0\}$ og $\boldsymbol{v} = v_z\boldsymbol{k} = \{0, 0, v_z\}$. Likningen for banen blir da

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t = \boldsymbol{j} + v_z t\boldsymbol{k}.$$

c) Vi skriver om $\boldsymbol{r}(t)$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t) &= (-7t + 3)\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k} \\ &= 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + t(-7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}) \\ &= \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t.\end{aligned}$$

Retningen er gitt ved $\boldsymbol{v} = -7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}$.

d) Hvis de to banene skal skjære hverandre må det finnes to tall t_1 og t_2 slik at $\boldsymbol{r}_1(t_1) = \boldsymbol{r}_2(t_2)$. Dette gir tre komponentlikninger:

$$t_1 = 3t_2 + 1 \qquad (1.1)$$

$$-6t_1 + 1 = 2t_2 \qquad (1.2)$$

$$2t_1 - 8 = 0 \qquad (1.3)$$

$$\begin{aligned}(1.3) \quad &\Rightarrow \quad t_1 = 4 \\ (1.1) \quad &\Rightarrow \quad t_2 = 1 \\ (1.2) \quad &\Rightarrow \quad t_2 = -\frac{23}{2}\end{aligned}$$

Her har vi ingen entydig løsning for t_1 og t_2, altså skjærer banen hverandre ikke.

e) Ved tiden $t = 0$ går banen igjennom punktet $P_0 = (3, -1, 5)$ og ved tiden $t = 1$ går banen gjennom punktet $P_1 = (-4, 3, 0)$. Vi vil finne banen uttrykt på formen

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t.$$

Vi kan nå sette inn for $t = 0$ og $t = 1$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t = 0) &= \boldsymbol{r}_0 = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r}(t = 1) &= \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} &= -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{r}_0 \\ &= -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k} \\ &= -7\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k} \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}(t) &= (3 - 7t)\boldsymbol{i} + (-1 + 4t)\boldsymbol{j} + (5 - 5t)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

Oppgave 4

a) Normaliser vektoren $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\text{norm}} &= \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{29} \\ &= \frac{1}{\sqrt{29}}\Big(3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}\Big).\end{aligned}$$

b) Tre vektorer med samme lengde som er slik at $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ utgjør en likesided trekant. For å finne et uttrykk for $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$ må vi plassere vektorene (trekanten) i et koordinatsystem. Dette kan gjøres på mange måter, men det lønner seg å legge en av vektorene langs en av koordinataksene. I figur 1.1 har vi valgt å plassere trekanten slik at $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}$. De andre vektorene er da gitt ved

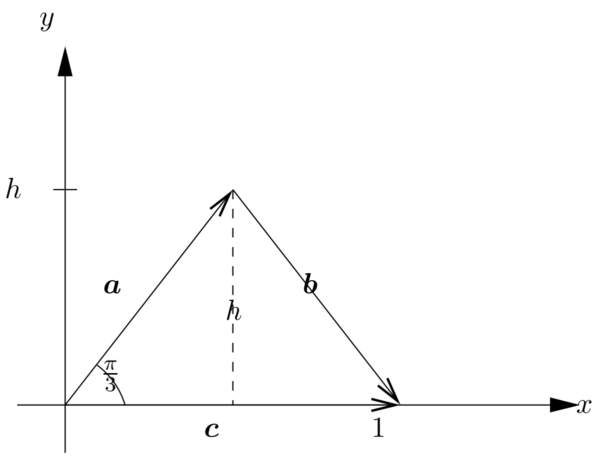
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + h\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{b} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{i} - h\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

Vi finner h:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{h}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{h}{1} = h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

og løsningen er gitt ved

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}.$$



Figur 1.1: Tre enhetsvektorer plassert slik at $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

Oppgave 5

Skalarproduktet av to vektorer er definert ved

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

der θ er vinkelen mellom $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$. Vi løser for $\cos\theta$:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= -3-6-8=-17\\
|\boldsymbol{a}| &= \sqrt{9+4+16}=\sqrt{29}\\
|\boldsymbol{b}| &= \sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}\\
\cos\theta &= -\frac{17}{\sqrt{29\cdot 14}}=-\frac{17}{\sqrt{406}}.
\end{aligned}
$$

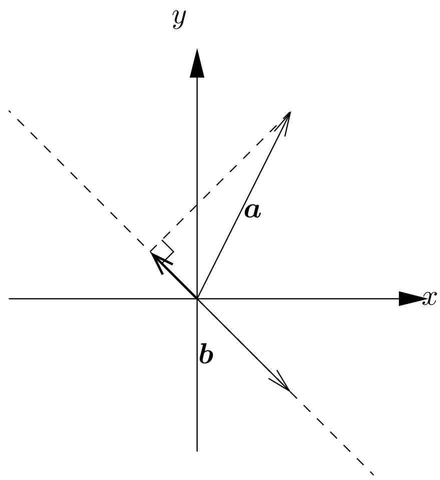
Denne likningen gir to mulig løsninger: $\theta \approx 147.53°$ og $\theta \approx 212.47°$. Siden vinkelen mellom to vektorer ikke kan overstige $180°$, blir riktig vinkel her $\theta \approx 147.53°$.

Oppgave 6

Projeksjonen av $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ på $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ er

$$\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\frac{1-2}{\sqrt{1+1}^2}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}).$$

Som vi ser av figur 1.2 kan projeksjonen av $\boldsymbol{a}$ på $\boldsymbol{b}$ tolkes som den delen av vektoren $\boldsymbol{a}$ som går i $\boldsymbol{b}$-retning.



Figur 1.2: Projeksjonen av $\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ på $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$.

Oppgave 7

Bruk høyrehåndsregelen eller definisjonen av kryssproduktet.

$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	0	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	0	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	0

Oppgave 8

Gitt vektorene $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \boldsymbol{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \boldsymbol{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ og skalaren α.

a) Vis at $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$ hvis og bare hvis $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er parallelle eller hvis $\boldsymbol{a} = 0$ eller $\boldsymbol{b} = 0$:

Anta at $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er parallelle. Da eksisterer det en α slik at $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$. Da har vi $a_1 = \alpha b_1$, $a_2 = \alpha b_2$ og $a_3 = \alpha b_3$. Dette gir oss følgende uttrykk:

$$\alpha = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

La oss nå se på $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \boldsymbol{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \boldsymbol{k}(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.
\end{aligned}$$

Dette gir tre likninger:

$$a_2b_3 = a_3b_2 \tag{1.4}$$
$$a_1b_3 = a_3b_1 \tag{1.5}$$
$$a_1b_2 = a_2b_1. \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
(1.4) \quad &\Rightarrow \quad a_2 = \frac{a_3}{b_3}b_2 = \alpha b_2 \\
(1.5) \quad &\Rightarrow \quad a_3 = \frac{a_1}{b_1}b_3 = \alpha b_3 \\
(1.6) \quad &\Rightarrow \quad a_1 = \frac{a_2}{b_2}b_1 = \alpha b_1
\end{aligned}$$

Altså er $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ parallelle. Hvis enten $\boldsymbol{a} = 0$ eller $\boldsymbol{b} = 0$ er det opplagt at $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$.

b) Vis at $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$:

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}(-b_2a_3 + b_3a_2) - \boldsymbol{j}(-b_1a_3 + b_3a_1) + \boldsymbol{k}(-b_1a_2 + b_2a_1) \\
&= \boldsymbol{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \boldsymbol{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \boldsymbol{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

c) Vis at $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}\Big(a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)\Big) - \boldsymbol{j}\Big(a_1(b_3 + c_3) - a_3(b_1 + c_1)\Big) + \\
&\quad \boldsymbol{k}\Big(a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)\Big) \\
&= \boldsymbol{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \boldsymbol{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \boldsymbol{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) + \\
&\quad \boldsymbol{i}(a_2 c_3 - a_3 c_2) - \boldsymbol{j}(a_1 c_3 - a_3 c_1) + \boldsymbol{k}(a_1 c_2 - a_2 c_1) \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}.
\end{aligned}$$

d) Vis at $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}\Big((a_2 + b_2)c_3 - (a_3 + b_3)c_2\Big) - \boldsymbol{j}\Big((a_1 + b_1)c_3 - (a_3 + b_3)c_1\Big) + \\
&\quad \boldsymbol{k}\Big((a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1\Big) \\
&= \boldsymbol{i}(a_2 c_3 - a_3 c_2) - \boldsymbol{j}(a_1 c_3 - a_3 c_1) + \boldsymbol{k}(a_1 c_2 - a_2 c_1) + \\
&\quad \boldsymbol{i}(b_2 c_3 - b_3 c_2) - \boldsymbol{j}(b_1 c_3 - b_3 c_1) + \boldsymbol{k}(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\
&= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}.
\end{aligned}$$

e) Vis at $(\alpha \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$:

$$\begin{aligned}
(\alpha \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}(\alpha a_2 b_3 - \alpha a_3 b_2) - \boldsymbol{j}(\alpha a_1 b_3 - \alpha a_3 b_1) + \boldsymbol{k}(\alpha a_1 b_2 - \alpha a_2 b_1) \\
&= \alpha\Big[\boldsymbol{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \boldsymbol{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \boldsymbol{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)\Big] \\
&= \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).
\end{aligned}$$

f) Vis at $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

La oss se på den venstre siden først:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}(a_2b_3 - a_3b_2) - \boldsymbol{j}(a_1b_3 - a_3b_1) + \boldsymbol{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \\
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}\Big((a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2\Big) - \\
&\quad \boldsymbol{j}\Big((a_2b_3 - a_3b_2)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_1\Big) + \\
&\quad \boldsymbol{k}\Big((a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1\Big). \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

Den høyre siden ledd for ledd:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\boldsymbol{b} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1\boldsymbol{i} + \\
&\quad (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2\boldsymbol{j} + \\
&\quad (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3\boldsymbol{k} \\
(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} &= (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)\boldsymbol{b} \\
&= (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_1\boldsymbol{i} + \\
&\quad (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_2\boldsymbol{j} + \\
&\quad (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

Vi samler leddene:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{i}(a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 - b_1c_1a_1 - b_2c_2a_1 - b_3c_3a_1) + \\
&\quad \boldsymbol{j}(a_1c_1b_2 + a_2c_2b_2 + a_3c_3b_2 - b_1c_1a_2 - b_2c_2a_2 - b_3c_3a_2) + \\
&\quad \boldsymbol{k}(a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 + a_3c_3b_3 - b_1c_1a_3 - b_2c_2a_3 - b_3c_3a_3).
\end{aligned}
$$

En enkel opprydding her gir oss (1.7).

g) Vis at $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ hvis og bare hvis $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b} = 0$.
$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ regnet vi ut i deloppgave f (likning 1.7). På tilsvarende måte får vi

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{i}\Big(a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)\Big) - \\
&\quad \boldsymbol{j}\Big(a_1(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_2c_3 - b_3c_2)\Big) + \\
&\quad \boldsymbol{k}\Big(a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)\Big). \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Setter vi likning 1.7 og likning 1.8 lik hverandre får vi følgende

$\boldsymbol{i}$-retning:

$$a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 = a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3$$
$$\Rightarrow \quad -a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1 = 0. \tag{1.9}$$

$\boldsymbol{j}$-retning:

$$-a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 = -a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2$$
$$\Rightarrow \quad -a_2b_3c_3 - a_2b_1c_1 + a_1b_1c_2 + a_3b_3c_2 = 0. \tag{1.10}$$

$\boldsymbol{k}$-retning:

$$a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_3c_1 = a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2$$
$$\Rightarrow \quad -a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_1c_3 + a_2b_2c_3 = 0. \tag{1.11}$$

Vi kan nå regne ut $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{i}\Big((-a_1c_3 + a_3c_1)b_3 - (a_1c_2 - a_2c_1)b_2\Big) - \\ &\quad \boldsymbol{j}\Big((a_2c_3 - a_3c_2)b_3 - (a_1c_2 - a_2c_1)b_1\Big) + \\ &\quad \boldsymbol{k}\Big((a_2c_3 - a_3c_2)b_2 - (-a_1c_3 + a_3c_1)b_1\Big)\end{aligned}$$

Settes dette uttrykket lik null får vi likningene (1.9) - (1.11).

h) Vis at $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = 0$:
$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ regnet vi ut i deloppgave f (likning 1.7). De to andre leddene gir

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{i}\Big((b_3c_1 - b_1c_3)a_3 - (b_1c_2 - b_2c_1)a_2\Big) - \\ &\quad \boldsymbol{j}\Big((b_2c_3 - b_3c_2)a_3 - (b_1c_2 - b_2c_1)a_1\Big) + \\ &\quad \boldsymbol{k}\Big((b_2c_3 - b_3c_2)a_2 - (b_3c_1 - b_1c_3)a_1\Big)\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{i}\Big((a_1c_3 - a_3c_1)b_3 - (a_2c_1 - a_1c_2)b_2\Big) - \\ &\quad \boldsymbol{j}\Big((a_3c_2 - a_2c_3)b_3 - (a_2c_1 - a_1c_2)b_1\Big) + \\ &\quad \boldsymbol{k}\Big((a_3c_2 - a_2c_3)b_2 - (a_1c_3 - a_3c_1)b_1\Big).\end{aligned}$$

Summerer vi opp leddene får vi

$\boldsymbol{i}$-retning:

$$\begin{aligned} & a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 + \\ & a_3b_3c_1 - a_3b_1c_3 - a_2b_1c_2 + a_2b_2c_1 + \\ & a_1b_3c_3 - a_3b_3c_1 - a_2b_2c_1 + a_1b_2c_2 \\ = \; & 0.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{j}$-retning:

$$\begin{aligned}
& -a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 + \\
& -a_3b_2c_3 + a_3b_3c_2 + a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 + \\
& -a_3b_3c_2 + a_2b_3c_3 + a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2 \\
= & \; 0.
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{k}$-retning:

$$\begin{aligned}
& a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_3c_1 + \\
& a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_1b_3c_1 + a_1b_1c_3 + \\
& a_3b_2c_2 - a_2b_2c_3 - a_1b_1c_3 + a_3b_1c_1 \\
= & \; 0.
\end{aligned}$$

Oppgave 9

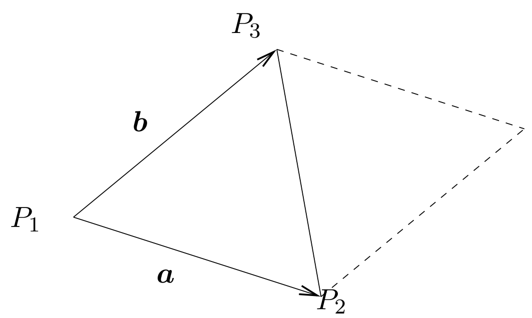
Arealet av parallellogrammet utspent av $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}(-3-8) - \boldsymbol{j}(9+2) + \boldsymbol{k}(12-1) \\
&= -11\boldsymbol{i} - 11\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

$$\text{Arealet} = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{121+121+121} = 11\sqrt{3}.$$

Oppgave 10

Gitt tre punkter $P_1 = (-2,-1,2)$, $P_2 = (2,0,1)$ og $P_3 = (2,2,0)$. Arealet av trekanten er halvparten av arealet til et parallellogram dannet av vektorene $\boldsymbol{a}$ (fra P_1 til P_2) og $\boldsymbol{b}$ (fra P_1 til P_3).



Figur 1.3: En trekant er halvparten av et parallellogram.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= 4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{b} &= 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}(-2+3) - \boldsymbol{j}(-8+4) + \boldsymbol{k}(12-4) \\
&= \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

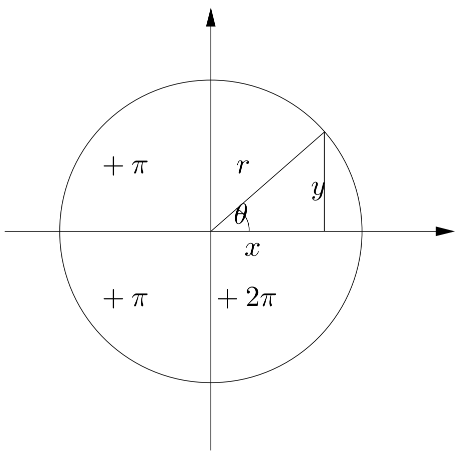
$$
\text{Arealet} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{1+16+64} = \frac{1}{2}\sqrt{81} = \frac{9}{2}.
$$

Oppgave 11

Generelt har vi:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta \\
r &= \sqrt{x^2+y^2} \\
\theta &= \arctan y/x, \quad x > 0,\, y \geq 0 \\
& \quad (+\pi \text{ hvis } x < 0,\ +2\pi \text{ hvis } x > 0 \text{ og } y < 0).
\end{aligned}
$$

Alternativt kan man bruke funksjonen atan2(y, x) som finnes i diverse programmeringsspråk (f.eks. Matlab) og som er lik $\arctan y/x$ i første og fjerde kvadrant, $\arctan y/x + \pi$ i andre kvadrant, og $\arctan y/x - \pi$ i tredje kvadrant.



Figur 1.4: Plane polarkoordinater og enhetssirkelen.

a) Kartesiske koordinater: $(6, 2\sqrt{3})$. Polarkoordinater:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{36+4\cdot 3} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \\
\theta &= \arctan y/x = \arctan\sqrt{3}/3 = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

Punktet uttrykt i polarkordinater er $(4\sqrt{3}, \pi/6)$.

b) Polarkoordinater: $(3, \pi/2)$. Kartesiske koordinater:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta = 3\cos\frac{\pi}{2} = 0 \\
y &= r\sin\theta = 3\sin\frac{\pi}{2} = 3.
\end{aligned}
$$

De kartesiske koordinatene til punktet er $(0, 3)$. Posisjonsvektoren uttrykt i kartesiske koordinater er $3\boldsymbol{j}$.

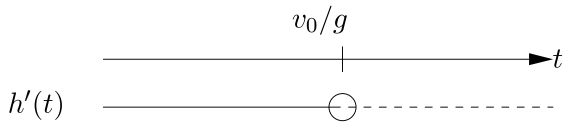
Oppgave 12

Gitt formelen for høyden (h) som funksjon av tiden (t) til en rakett som skytes vertikalt oppover i tyngdefeltet:

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.12}$$

a) Den største høyden (t_m) finner vi ved å derivere funksjonen og bestemme ekstremalverdiene.

$$h'(t) = v_0 - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}.$$



$t_\mathrm{m} = v_0/g$ er et makspunkt for $h(t)$. La oss sjekke dimensjonen til t_m for sikkerhetsskyld:

$$[t_\mathrm{m}] = \frac{[v_0]}{[g]} = \frac{m/s}{m/s^2} = s.$$

Den maksimale høyden er nå lett å regne ut:

$$
\begin{aligned}
h_\mathrm{m} &= h(t_\mathrm{m}) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \\
&= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.
\end{aligned}
$$

Dimensjonen blir

$$[h_\mathrm{m}] = \frac{[v_0^2]}{[g]} = \frac{m^2/s^2}{m/s^2} = m.$$

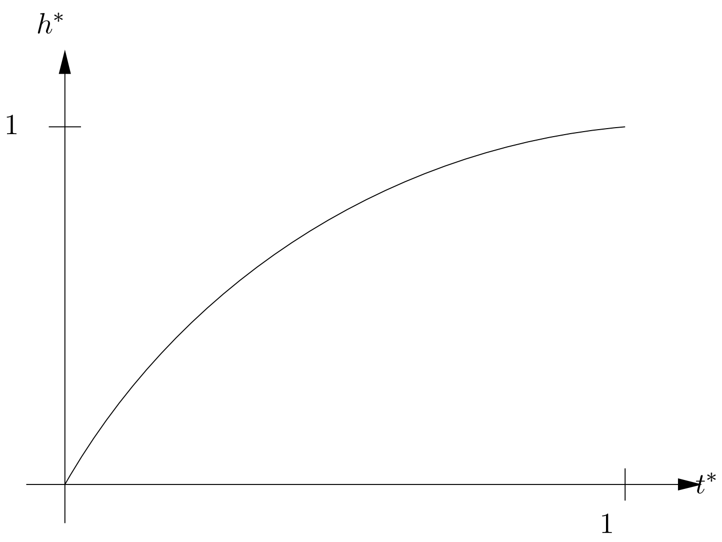
b) Vi innfører to nye dimensjonsløse parametere (variable):

$$
\begin{aligned}
h^* &= \frac{h}{h_\mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad h = h^* h_\mathrm{m} \\
t^* &= \frac{t}{t_\mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad t = t^* t_\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

Insatt i likning 1.12 gir dette:

$$
\begin{aligned}
h^* h_\mathrm{m} &= v_0 t^* t_\mathrm{m} - \frac{1}{2} g {t^*}^2 t_\mathrm{m}^2 \\
h^* &= \frac{v_0 t^* t_\mathrm{m}}{h_\mathrm{m}} - \frac{1}{2} \frac{g {t^*}^2 t_\mathrm{m}^2}{h_\mathrm{m}} \\
&= \frac{v_0 t^* \frac{v_0}{g}}{\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}} - \frac{1}{2} g \frac{{t^*}^2 \frac{v_0^2}{g^2}}{\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}} \\
&= 2t^* - {t^*}^2 .
\end{aligned}
$$

c)



Figur 1.5: Funksjonen $h^* = 2t^* - {t^*}^2$.

Kapittel 2

Gradientvektoren, vektorfelt, strømlinjer, feltlinjer

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x, y, z) = x^2y + z^2x$. Vi regner først ut de partielt deriverte med hensyn på x, y og z:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2zx.$$

De dobbeltderiverte blir nå

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2x, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= 2z \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 2x, & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= 2z. \end{aligned}$$

Oppgave 2

Taylor-approksimasjonen av første orden til en funksjon $f = f(x)$ om punktet x_0 er gitt ved

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

For funksjoner av to variable, $g = g(x, y)$, om punktet (x_0, y_0) har vi

$$T_1(x, y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

der g_x og g_y betegner de partielt deriverte av g med hensyn på henholdsvis x og y.

a) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad f'(x) = \cos x.$

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \sin 0 + \cos 0 \cdot (x - 0) \\ &= 0 + 1 \cdot x \\ &= x. \end{aligned}$$

b) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0, \quad f'(x) = -\sin x.$

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \cos 0 - \sin 0 \cdot (x - 0) \\ &= 1 - 0 \cdot x \\ &= 1. \end{aligned}$$

c) $f(x) = e^{x^2}, \quad f'(x) = 2xe^{x^2}.$

$$\begin{aligned} x_0 = 0: \quad T_1(x) &= e^0 + 2\cdot 0\cdot e^0(x-0) \\ &= 1 + 0\cdot(x-0) \\ &= 1 \\ x_0 = 1: \quad T_1(x) &= e^1 + 2\cdot 1\cdot e^1(x-1) \\ &= e + 2e(x-1) \\ &= e(2x-1). \end{aligned}$$

d) $f(x) = \sin\sqrt{x}, \quad x_0 = \pi^2, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cos\sqrt{x}.$

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \sin\pi + \frac{1}{2}(\pi^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\pi(x-\pi^2) \\ &= 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}(-1)(x-\pi^2) \\ &= -\frac{1}{2\pi}(x-\pi^2). \end{aligned}$$

e) $g(x,y) = \sin x\cos y, \quad (x_0,y_0) = (0,0), \quad g_x = \cos x\cos y, \quad g_y = -\sin x\sin y.$

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= \sin 0\cos 0 + \cos 0\cos 0(x-0) - \sin 0\sin 0(y-0) \\ &= 0 + 1\cdot(x-0) - 0\cdot(y-0) \\ &= x. \end{aligned}$$

f) $g(x,y) = xy^2 - e^{x+y}, \quad (x_0,y_0) = (1,-1), \quad g_x = y^2 - e^{x+y}, \quad g_y = 2xy - e^{x+y}.$

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= 1\cdot(-1)^2 - e^{1-1} + \big((-1)^2 - e^{1-1}\big)(x-1) + \big(2\cdot 1\cdot(-1) - e^{1-1}\big)(y+1) \\ &= 1 - 1 + (1-1)(x-1) + (-2-1)(y+1) \\ &= -3y - 3. \end{aligned}$$

g) $g(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}, \quad (x_0,y_0) = (-1,2).$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{y\big(1+x^2+y^2\big) - xy\cdot 2x}{\big(1+x^2+y^2\big)^2} = \frac{y - x^2y + y^3}{\big(1+x^2+y^2\big)^2} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{x\big(1+x^2+y^2\big) - xy\cdot 2y}{\big(1+x^2+y^2\big)^2} = \frac{x - xy^2 + x^3}{\big(1+x^2+y^2\big)^2} \\ T_1(x,y) &= \frac{-2}{1+1+4} + \frac{2-2+8}{36}(x+1) + \frac{-1+4-1}{36}(y-2) \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}(x+1) + \frac{1}{18}(y-2) \\ &= \frac{4x+y-4}{18}. \end{aligned}$$

Oppgave 3

Taylor-approksimasjonen av andre orden til en funksjon $f = f(x)$ om punktet x_0 er gitt ved

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

a) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x.$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 0 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (x - 0)^2 \\ &= x. \end{aligned}$$

b) $f(c) = \cos x, \quad x_0 = 0, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x.$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 1 + 0 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2}(-1)(x - 0)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

c) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 2, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$

$$T_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2.$$

d) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}, \quad x_0 = -1, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}, \quad f''(x) = \frac{1}{2}e^{-x}.$

$$T_2(x) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e(x + 1) + \frac{1}{4}e(x + 1)^2.$$

Oppgave 4

Vi følger hintet og rekkeutvikler teller

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

og nevner

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Så utfører vi en polynomdivisjon og beholder kun ledd til andre orden

$$\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}{x - \frac{x^3}{6}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

Så kan vi sette inn verdien $x = 0.01$

$$\frac{\log(1.01)}{\sin(0.01)} \approx 0.99505.$$

Legg merke til at det er nødvendig å rekkeutvikle både teller og nevner til tredje orden for at sluttresultatet skal bli nøyaktig til andre orden, det skyldes at rekkeutviklingene til både teller og nevner starter med ledd av første orden.

Oppgave 5

Gradienten til et skalarfelt β, også kalt gradientvektoren, er definert ved

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Vi skal i denne oppgaven benytte oss av $\boldsymbol{r}$-vektoren:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad |\boldsymbol{r}| = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

a) $\beta = x^2 + xy + z^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial x} &= 2x + y \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} &= x \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} &= 2z \\ \Rightarrow \quad \nabla\beta &= (2x + y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

b) $\beta = e^{-(xy+z)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial x} &= e^{-(xy+z)} \cdot (-y) \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} &= e^{-(xy+z)} \cdot (-x) \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} &= e^{-(xy+z)} \cdot (-1) \\ \Rightarrow \quad \nabla\beta &= -e^{-(xy+z)}(y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}). \end{aligned}$$

c) $\beta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial x} &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} &= \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \Rightarrow \quad \nabla\beta &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}. \end{aligned}$$

d) $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x \\
\frac{\partial\beta}{\partial y} &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y \\
\frac{\partial\beta}{\partial z} &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2z \\
\Rightarrow \quad \nabla\beta &= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.
\end{aligned}$$

e) $\beta = \beta(r), \quad r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= \frac{d\beta}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\beta}{dr}\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{d\beta}{dr}\frac{x}{r} \\
\frac{\partial\beta}{\partial y} &= \frac{d\beta}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{d\beta}{dr}\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y = \frac{d\beta}{dr}\frac{y}{r} \\
\frac{\partial\beta}{\partial z} &= \frac{d\beta}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{d\beta}{dr}\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2z = \frac{d\beta}{dr}\frac{z}{r} \\
\Rightarrow \quad \nabla\beta &= \frac{d\beta}{dr}\frac{1}{r}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = \frac{d\beta}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}.
\end{aligned}$$

Vi kontrollerer ved å sammenlikne resultatene fra deloppgavene c) og d):

c) $\beta = r \quad \Rightarrow \quad \nabla\beta = 1\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}.$ Ok!

d) $\beta = \dfrac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \nabla\beta = -\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$ Ok!

Oppgave 6

Gradienten til et skalarfelt β er definert ved

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

a) $\nabla\beta = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= yz \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = xyz + f_1(y,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial y} &= xz \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = xyz + f_2(x,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial z} &= xy \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = xyz + f_3(x,y).
\end{aligned}$$

For å få en entydig β må vi velge $f_1 = f_2 = f_3 = C$ (= konstant) slik at

$$\beta(x,y,z) = xyz + C.$$

b) $\nabla\beta = \cos(yz)\boldsymbol{i} - xz\sin(yz)\boldsymbol{j} - xy\sin(yz)\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= \cos(yz) \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = x\cos(yz) + f_1(y,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial y} &= -xz\sin(yz) \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = x\cos(yz) + f_2(x,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial z} &= -xy\sin(yz) \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = x\cos(yz) + f_3(x,y).
\end{aligned}$$

Entydig β krever $f_1 = f_2 = f_3 = C$:

$$\beta(x,y,z) = x\cos(yz) + C.$$

c) $\nabla\beta = -e^{-x}\boldsymbol{i} - e^{-y}\boldsymbol{j} - e^{-z}\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= -e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = e^{-x} + f_1(y,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial y} &= -e^{-y} \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = e^{-y} + f_2(x,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial z} &= -e^{-z} \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = e^{-z} + f_3(x,y).
\end{aligned}$$

Her må vi velge funksjonene f_1, f_2 og f_3 slik at

$$\begin{aligned}
f_1(y,z) &= e^{-y} + e^{-z} + C \\
f_2(x,z) &= e^{-x} + e^{-z} + C \\
f_3(x,y) &= e^{-x} + e^{-y} + C \\
\Rightarrow \quad \beta(x,y,z) &= e^{-x} + e^{-y} + e^{-z} + C.
\end{aligned}$$

Oppgave 7

Definisjonen av gradientvektoren av en skalarfunksjon β er

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

a)

$$\begin{aligned}
\nabla(\alpha+\beta) &= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha+\beta)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha+\beta)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha+\beta)\boldsymbol{k} \\
&= \frac{\partial\alpha}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\boldsymbol{k} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k} \\
&= \nabla\alpha + \nabla\beta.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\nabla(c\beta) &= \frac{\partial}{\partial x}(c\beta)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(c\beta)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(c\beta)\boldsymbol{k} \\
&= c\frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + c\frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + c\frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k} \\
&= c\nabla\beta.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\nabla(\alpha\beta) &= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\beta)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha\beta)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\beta)\boldsymbol{k} \\
&= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\beta + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\beta + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\beta + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} \\
&= \beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) + \alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \\
&= \beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{1}{\beta}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\beta}\right)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\beta}\right)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\beta}\right)\boldsymbol{k} \\
&= -\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k} \\
&= -\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \\
&= -\frac{1}{\beta^2}\nabla\beta.
\end{aligned}$$

Oppgave 8

Vi har gitt temperaturmodellen

$$T = T_0\frac{R}{r} \tag{2.1}$$

der T_0 og R er konstanter og $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$.

a) Vi regner først ut temperaturgradienten i et vilkårlig punkt:

$$\nabla T = \nabla\left(T_0\frac{R}{r}\right) = T_0R\nabla\left(\frac{1}{r}\right).$$

Den siste likheten får vi fra oppgave 8b. Fra oppgave 5d får vi følgende resultat:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

som gir oss temperaturgradienten

$$\nabla T = -\frac{T_0R}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Ved jordoverflaten er $r = R$ og

$$\nabla T = -\frac{T_0}{R^2}\boldsymbol{r}.$$

Retningen er her $-\boldsymbol{r}$, dvs. fra jordoverflaten og inn mot sentrum av jorden, mens størrelsen blir

$$|\nabla T| = \frac{T_0}{R^2}|\boldsymbol{r}| = \frac{T_0}{R}.$$

MERK: Oppgaven spør om retning, men ikke om retningsvektor med enhets lengde. Det er derfor valgfritt om vi angir retningen ved en vektor med vilkårlig lengde.

b) Vi skalerer T med temperaturkonstanten T_0 og r med avstandskonstanten R. Da får vi to nye dimensjonsløse variabler:

$$T^* = \frac{T}{T_0}, \quad r^* = \frac{r}{R}.$$

Vi kan nå sette $T = T^* T_0$ og $r = r^* R$ inn i likning 2.1:

$$\begin{aligned} T^* T_0 &= T_0 \frac{R}{r^* R} \\ T^* &= \frac{1}{r^*}. \end{aligned}$$

Oppgave 9

Et fjellpass er beskrevet ved

$$h(x, y) = h_0 + \frac{a}{R^2} xy \tag{2.2}$$

der h_0, R og a er konstanter.

a) Høydekonturene finner vi ved å sette $h(x, y) = C =$ konstant:

$$\begin{aligned} C &= h_0 + \frac{a}{R^2} xy \\ xy &= \frac{C - h_0}{a} R^2. \end{aligned}$$

Hvis $C = h_0$ har vi at $xy = 0$ som gir $x = 0$ og $y = 0$. Både x- og y-aksen er altså høydekonturer. Hvis $C \neq h_0$ har vi:

$$y = R^2 \frac{C - h_0}{a} \frac{1}{x}.$$

For $x = R$ og $y = R$:

$$R = \frac{C - h_0}{a} R \quad \Rightarrow \quad C = h_0 + a \quad (= 1450\text{m})$$

For $x = R$ og $y = -R$:

$$-R = \frac{C - h_0}{a} R \quad \Rightarrow \quad C = h_0 - a \quad (= 950\text{m})$$

o.s.v.

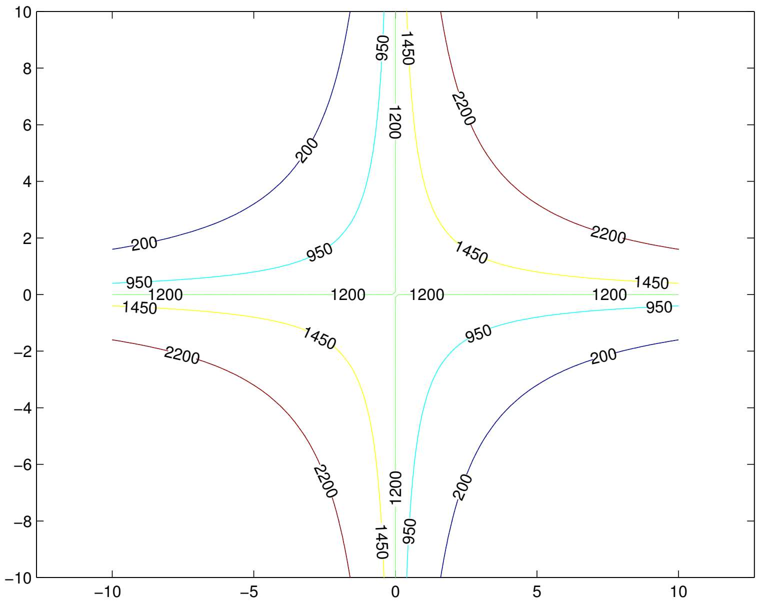
b) Gradientvektoren peker mot større verdier av skalarfunksjonen:

$$\begin{aligned} \nabla h &= \frac{\partial h}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \boldsymbol{j} \\ &= \frac{a}{R^2} (y \boldsymbol{i} + x \boldsymbol{j}). \end{aligned}$$

Størrelsen til gradientvektoren sier hvor bratt stigningen er:

$$|\nabla h| = \frac{a}{R^2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Stigningen er altså like bratt på sirkler med sentrum i origo og det blir brattere jo lenger vekk fra origo vi kommer.



Figur 2.1: Konturlinjene til fjellpassmodellen (2.2)

c) Vi innfører nye dimensjonsløse variabler:

$$h^* = \frac{h}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{R}, \quad y^* = \frac{y}{R}.$$

Vi kan nå sette $h = h^*h_0$, $x = x^*R$ og $y = y^*R$ inn i likning 2.2:

$$\begin{aligned} h^*h_0 &= h_0 + \frac{a}{R^2}x^*Ry^*R \\ h^* &= 1 + \frac{a}{h_0}x^*y^*. \end{aligned}$$

Brøken a/h_0 er dimensjonsløs siden både a og h_0 har dimensjon meter. Vi markerer dette ved å innføre $a^* = a/h_0$ slik at den dimensjonsløse likningen blir

$$h^* = 1 + a^*x^*y^*.$$

Oppgave 10

a) $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}, \quad u = a, \quad v = b.$

$$\begin{aligned} u\,dy &= v\,dx \\ a\,dy &= b\,dx \\ \int a\,dy &= \int b\,dx \\ ay &= bx + C \\ y &= \frac{b}{a}x + C. \end{aligned}$$

(C er en vilkårlig konstant $\Rightarrow C/a = C$.)

b) $\boldsymbol{v} = ay\boldsymbol{i} + bx\boldsymbol{j}, \quad u = ay, \quad v = bx.$

$$\begin{aligned}
u\,dy &= v\,dx \\
ay\,dy &= bx\,dx \\
\int ay\,dy &= \int bx\,dx \\
\frac{1}{2}ay^2 &= \frac{1}{2}x^2 + C \\
y^2 &= \frac{b}{a}x^2 + C \\
y &= \pm\sqrt{\frac{b}{a}x^2 + C}.
\end{aligned}$$

Hvis a er negativ får vi

$$y^2 + \alpha x^2 = C, \quad \alpha = -\frac{b}{a} > 0$$

og strømlinjene blir ellipser med sentrum i origo.

c) $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + bx\boldsymbol{j}, \quad u = a, \quad v = bx.$

$$\begin{aligned}
u\,dy &= v\,dx \\
a\,dy &= bx\,dx \\
\int a\,dy &= \int bx\,dx \\
ay &= \frac{1}{2}bx^2 + C \\
y &= \frac{b}{2a}x^2 + C.
\end{aligned}$$

Oppgave 11

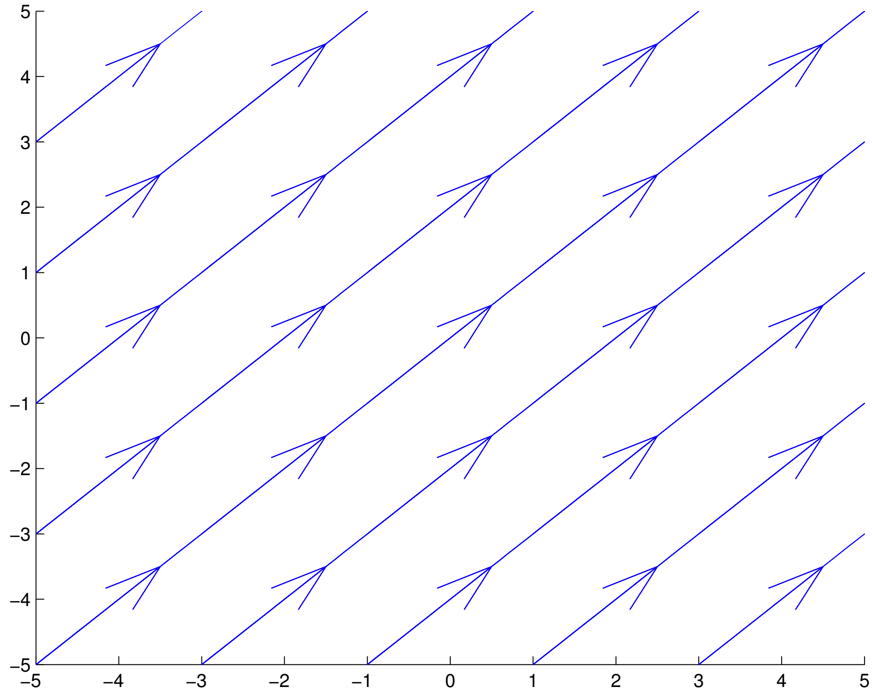
Gitt vektorfeltet

$$\boldsymbol{v} = -\frac{cy}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{cx}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}.$$

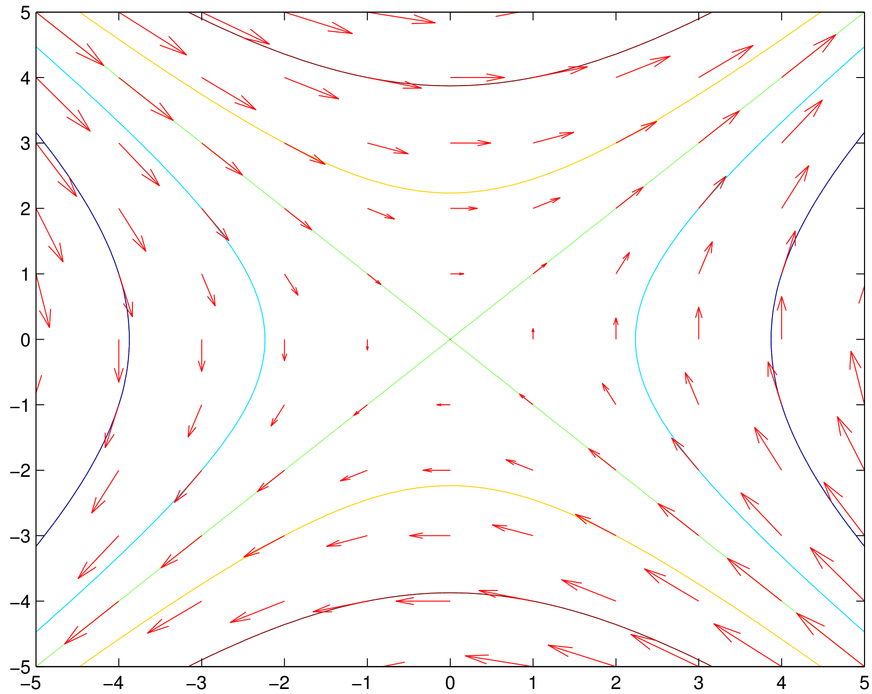
Vi finner som vanlig strømlinjene ved å sette inn i formelen $u\,dy = v\,dx$. Før vi integrerer må vi huske på å forkorte så mye som mulig.

$$\begin{aligned}
-\frac{cy}{x^2+y^2}\,dy &= \frac{cx}{x^2+y^2}\,dx \\
-y\,dy &= x\,dx \\
-\int y\,dy &= \int x\,dx \\
-\frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{2}x^2 + C \\
x^2 + y^2 &= 2C.
\end{aligned}$$

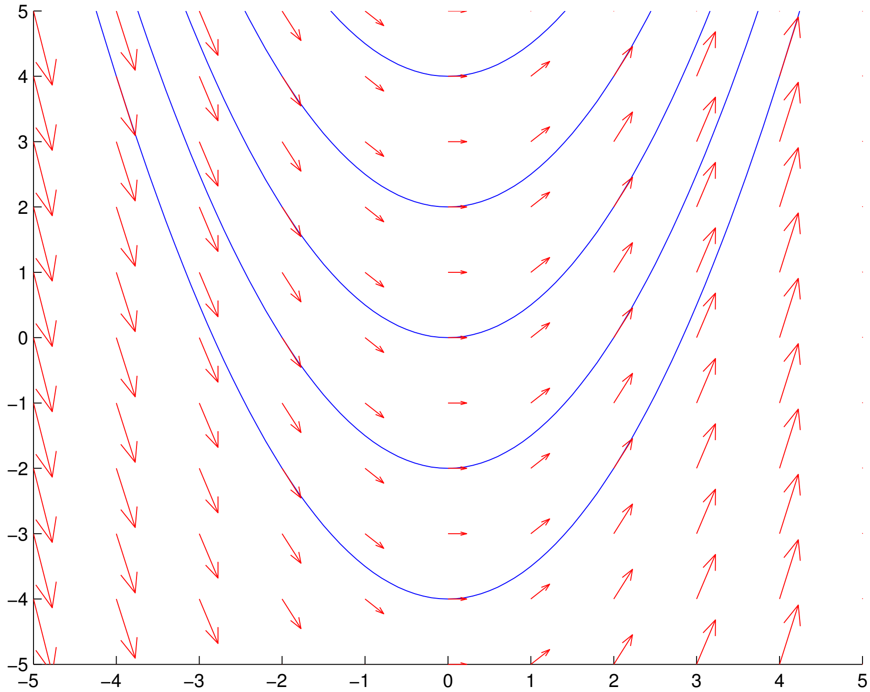
Strømlinjene blir sirkler med sentrum i orgio.



Figur 2.2: Konturlinjene $C = -8, -6, \ldots, 6, 8$ til vektorfeltet $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ der $a = b = 1$.



Figur 2.3: Konturlinjene $C = -15, -5, 0, 5, 15$ til vektorfeltet $\boldsymbol{v} = ay\boldsymbol{i} + bx\boldsymbol{j}$ der $a = b = 1$.



Figur 2.4: Konturlinjene $C = -4, -2, 0, 2, 4$ til vektorfeltet $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + bx\boldsymbol{j}$ der $a = b = 1$.

Oppgave 12

La oss først finne $\boldsymbol{v}$ uttrykt ved hjelp av β:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \nabla\beta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{j}.$$

Strømlinjene er gitt ved likningen

$$\begin{aligned} u\,dy &= v\,dx \\ -\frac{\partial\beta}{\partial y}\,dy &= \frac{\partial\beta}{\partial x}\,dx \\ \frac{\partial\beta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\beta}{\partial y}\,dy &= 0. \end{aligned}$$

Venstresiden over kjenner vi igjen som $d\beta$, tilveksten i β. Hvis tilveksten i β er null må β være konstant. Strømlinjene til vektorfunksjonen $\boldsymbol{v}$ er altså gitt ved

$$\beta(x, y) = \beta_0 = \text{konstant}.$$

Oppgave 13

Vi har gitt et hastighetsfelt

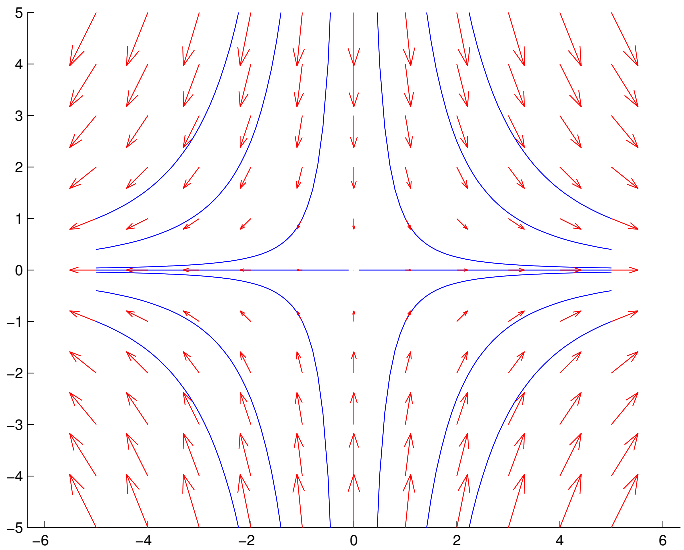
$$\boldsymbol{v} = 2kx\boldsymbol{i} + 2ky\boldsymbol{j} - 4kz\boldsymbol{k}, \quad k > 0.$$

a) I xz-planet har $\boldsymbol{v}$ komponentene $u = 2kx$ og $w = -4kz$. Likningen for strømlinjene blir

$$\begin{aligned} u\,dz &= w\,dx \\ 2kx\,dz &= -4kz\,dx. \end{aligned}$$

Før vi går løs på integreringen, må vi forkorte så mye som mulig og sørge for at alle uttrykk med x er på samme side som dx og alle uttrykk med z er på samme side som dz.

$$\begin{aligned} x\,dz &= -2z\,dx \\ \frac{1}{z}\,dz &= -\frac{2}{x}\,dx \\ \int \frac{1}{z}\,dz &= -2\int \frac{1}{x}\,dx \\ \ln z &= -2\ln x + C \\ e^{\ln z} &= e^{-2\ln x + C} \\ z &= e^{\ln x^{-2}} \cdot e^{C} \\ z &= Cx^{-2} \\ z &= \frac{C}{x^2}. \end{aligned}$$

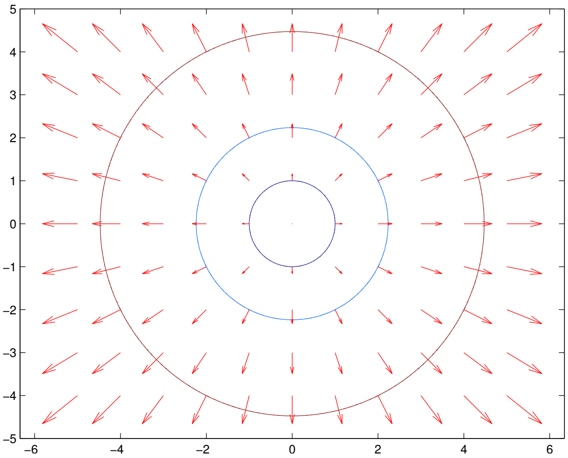


Figur 2.5: Konturlinjene $C = -25, -10, -1, 0, 1, 10, 25$ til vektorfeltet $\boldsymbol{v} = 2kx\boldsymbol{i} - 4kz\boldsymbol{k}$ der $k = 1$.

b) Det er tre måter strømmen kan være aksesymmetrisk på: om x-aksen, om y-aksen eller om z-aksen. Strømstyrken i xy-planet er gitt ved:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{4k^2x^2 + 4k^2y^2} = 2k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vi har samme strømstyrke på sirkler med sentrum i origo. Retningen er gitt ved $\boldsymbol{v} = 2k(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = 2k\boldsymbol{r}$. Vi har altså symmetri om z-aksen.



Figur 2.6: Vektorfeltet $\boldsymbol{v} = 2kx\boldsymbol{i} + 2ky\boldsymbol{j}$ er symmetrisk om z-aksen.

Kapittel 3

Bruk av Matlab

Oppgave 1

a) `>> sum(diag(A)) + sum(diag(B)) + sum(diag(C))`

eller:

```
>> sum(diag(A) + diag(B) + diag(C))
```

eller:

```
>> sum(diag(A + B + C))
```

b) `>> sum(A(1,:)) + sum(A(2,:))`

eller:

```
>> sum(sum(A(1:2,:)'))
```

c) `>> v = linspace(-4*pi,4*pi,17)`

d)
```
>> D = 3*eye(8) + diag(2*ones(7, 1), -1) + diag(2*ones(7, 1), 1) +
       diag(ones(6, 1), -2) + diag(ones(6, 1), 2)
```

Oppgave 2

a)
```
function n=lengde(x, y, z)
% Returnerer lengden til en vektor
% med komponenter {x,y,z}

if nargin < 3
  error('lengde tar 3 innparametre!')
end

n = sqrt(x^2 + y^2 + z^2);
end
```

b)
```
function n=lengde2(v)
% Returnerer lengden til en vektor v
% med vilkårlig dimensjon

n = sqrt(sum(v.^2));
end
```

Oppgave 3

a)
```
x = linspace(-2*pi,2*pi,401);
y = 4*sin(2*x);
plot(x, y)
```

b)
```
x = linspace(-10,2,12001);
y = x.^2.*exp(.5*x);
plot(x, y)
```

c)
```
t = linspace(0,8*pi,401);
x = t.*cos(t);
y = t.*sin(t);
plot(x, y)
```

d)
```
t = linspace(-pi,pi,63);
[x,y] = meshgrid(t);
z = sin(x).*sin(y);
surf(x, y, z)
```

e)
```
t = linspace(1,5,401);
[x,y] = meshgrid(t);
z = log(x.*y)./(x.^2 + y.^2);
[C,h] = contour(x, y, z);
clabel(C, h)
```

f)
```
[x,y] = meshgrid(-5:1:5);
u = x./(x.^2 + y.^2);
v = y./(x.^2 + y.^2);
figure(1)
quiver(x, y, u, v)
figure(2)
quiver(x, y, u, -v)
figure(3)
quiver(x, y, v, u)
figure(4)
quiver(x, y, v, -u)
```

Oppgave 4

a)
```
[x,y] = meshgrid(linspace(0,2,21), linspace(-2,2,41));
h = 1000 + 50*x.^2.*y.^2.*exp(1 - x.^2);
surf(x, y, h, 'FaceColor', [.36 .67 .93])
```

```
axis square
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('h')
```

b)
```
[x,y] = meshgrid(linspace(0,2,21), linspace(-2,2,41));
h = 1000 + 50*x.^2.*y.^2.*exp(1 - x.^2);

% La Matlab velge høydenivåer:
%[C,h] = contour(x, y, h);

% Plot et gitt antall høydenivåer:
%[C,h] = contour(x, y, h, 20);

% Plot bare noen utvalgte høydenivåer:
v = 1001:10:1091;
[C,h] = contour(x, y, h, v);

clabel(C, h)
colorbar
axis square
```

c)
```
[x,y] = meshgrid(linspace(0,2,21), linspace(-2,2,41));
h = 1000 + 50*x.^2.*y.^2.*exp(1 - x.^2);

v = 1001:10:1091;
contour(x, y, h, v);
colorbar
axis square

[x,y] = meshgrid(linspace(0,2,11), linspace(-2,2,21));
h = 1000 + 50*x.^2.*y.^2.*exp(1 - x.^2);
[dhx,dhy] = gradient(h);
hold on
quiver(x, y, dhx, dhy, 1.5)
hold off
```

Oppgave 5

a)
```
function f=fakultet(n)
% f=fakultet(n) returnerer n!

f = prod(1:n);
end
```

b)
```
function f=funk(x, n)
% f=funk(x, n) returnerer den n'te deriverte til cos(x)

if mod(n, 4) == 0,
  f = cos(x);
```

```
elseif mod(n, 4) == 1,
  f = - sin(x);
elseif mode(n, 4) == 2,
  f = -cos(x);
elseif mod(n, 4) == 3,
  f = sin(x);
end
end
```

eller:

```
function f=funk(x, n)
% f=funk(x, n) returnerer den n'te deriverte til cos(x)

f = cos(x + n*pi/2);
end
```

c)

```
function f=taylor1D(x, x0, n)

f = funk(x0, 0);
for i=1:n,
  f = f + (1/fakultet(i))*funk(x0, i)*(x - x0)^i;
end
end
```

d)

```
N = 51;
x = linspace(-pi/2,3*pi/2,N);
y = cos(x);
plot(x, y, 'r');
axis equal
hold on

x0 = pi/2;
y1 = []; y2 = []; y3 = []; y4 = [];

for i=1:N,
  y1(i) = taylor1D(x(i), x0, 1);
  y2(i) = taylor1D(x(i), x0, 3);
  y3(i) = taylor1D(x(i), x0, 5);
  y4(i) = taylor1D(x(i), x0, 7);
end

plot(x, y1, 'b');
plot(x, y2, 'g');
plot(x, y3, 'c');
plot(x, y4, 'm');
hold off
```

Kapittel 4

Vektorfluks og sirkulasjon, divergens, virvling, strømfunksjonen

Oppgave 1

Gitt et vektorfelt

$$\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}.$$

Divergensen til $\boldsymbol{v}$ er definert som

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

og virvlingen er gitt ved determinanten

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

a) $\boldsymbol{v} = xy^2z^3\boldsymbol{i} + xy^2z^3\boldsymbol{j} + xy^2z^3\boldsymbol{k}$.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = y^2z^3 + 2xyz^3 + 3xy^2z^2.$$

Virvling:

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^3 & xy^2z^3 & xy^2z^3 \end{vmatrix} \\ &= \left(2xyz^3 - 3xy^2z^2\right)\boldsymbol{i} - \left(y^2z^3 - 3xy^2z^2\right)\boldsymbol{j} + \left(y^2z^3 - 2xyz^3\right)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{v} = e^{yz}\boldsymbol{i} + e^{xz}\boldsymbol{j} + e^{xy}\boldsymbol{k}$.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Virvling:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{yz} & e^{xz} & e^{xy} \end{vmatrix} \\
&= \Big(xe^{xy} - xe^{xz}\Big)\boldsymbol{i} - \Big(ye^{xy} - ye^{yz}\Big)\boldsymbol{j} + \Big(ze^{xz} - ze^{yz}\Big)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

c) $\boldsymbol{v} = e^{x^2}\boldsymbol{i} + \sin(xy)\boldsymbol{j} - \cos(z^2)\boldsymbol{k}$.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2xe^{x^2} + x\cos(xy) + 2z\sin(z^2).$$

Virvling:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{x^2} & \sin(xy) & \cos(z^2) \end{vmatrix} \\
&= y\cos(xy)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

d) $\boldsymbol{v} = (x+y+z)^2\boldsymbol{i} + \frac{xy}{z}\boldsymbol{k}$.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2(x+y+z) - \frac{xy}{z^2}.$$

Virvling:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+y+z)^2 & 0 & \frac{xy}{z} \end{vmatrix} \\
&= \frac{x}{z}\boldsymbol{i} - \Big(\frac{y}{z} - 2(x+y+z)\Big)\boldsymbol{j} - 2(x+y+z)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

a) $\boldsymbol{v} = u(z)\boldsymbol{i}, \quad u(z) = \dfrac{U_0 z^2}{h^2}, \quad 0 \le z \le h, \quad U_0 = \text{konstant}, \quad h = \text{konstant}.$

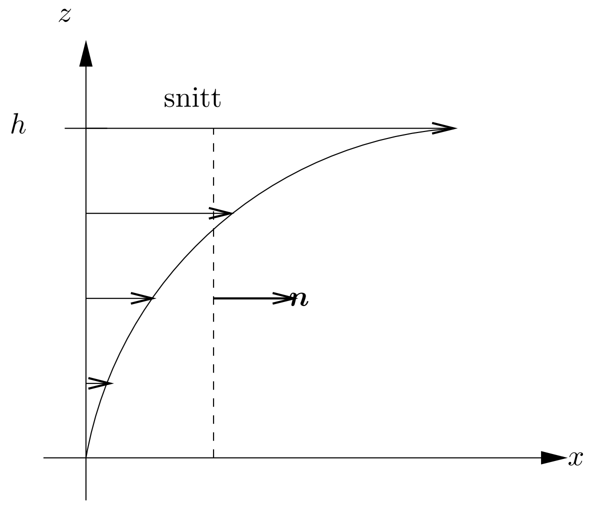
Vi antar at problemet er to-dimensjonalt i xz-planet.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Virvling:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{j} = \frac{2U_0 z}{h^2}\boldsymbol{j}.$$



Figur 4.1: Vindprofilet til $\boldsymbol{v} = \dfrac{U_0 z^2}{h^2}\boldsymbol{i}$.

Strømfunksjonen $\psi(x, z)$ finner vi ved å løse likningssystemet

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -u \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = w. \tag{4.2}$$

Fra (4.2) får vi

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \psi(z).$$

Vi setter inn for u i (4.1) og integrerer:

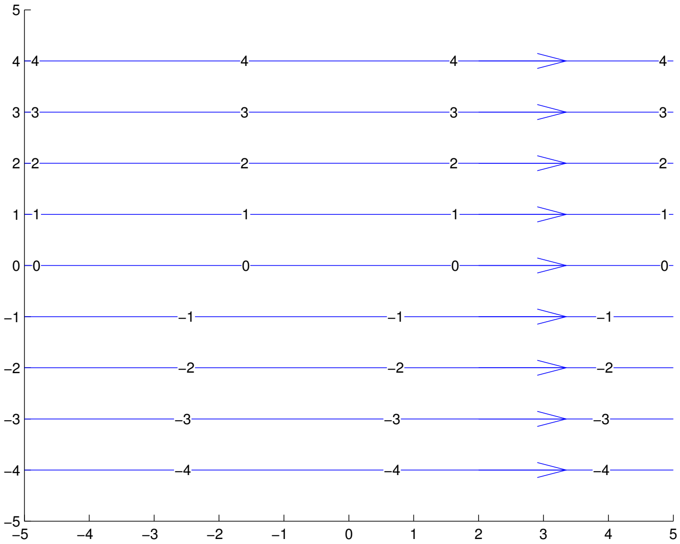
$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial z} &= -\frac{U_0 z^2}{h^2} \\ \Rightarrow \quad \psi(z) &= -\frac{1}{3}\frac{U_0}{h^2}z^3 + C. \end{aligned}$$

Siden ψ her er en funksjon av bare z får vi en integrasjonskonstant C i stedet for en funksjon $f(x)$. Strømlinjene finner vi ved å sette $\psi = \psi_0 =$ konstant:

$$\begin{aligned} z^3 &= \frac{-3h^2(\psi_0 - C)}{U_0} \\ &= C^3 \quad \text{(Brøken er konstant)} \\ \Rightarrow \quad z &= C. \end{aligned}$$

Dette gir rette horisontale linjer (se figur 4.2). Volumstrømmen er gitt ved

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$



Figur 4.2: Strømlinjene til $\boldsymbol{v} = u(z)\boldsymbol{i}$ er rette horisontale linjer.

der $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$ er en normalvektor til snittet (se figur 4.1). $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i} = u(z)$ slik at vi får

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_0^h u(z)\,dz \\
&= \frac{U_0}{h^2}\int_0^h z^2\,dz \\
&= \frac{1}{3}U_0 h.
\end{aligned}
$$

Vi skal til slutt vise at volumstrømmen er lik differansen i strømfunksjonens verdi mellom bakken og $z = h$:

$$
\begin{aligned}
Q &= \psi(z{=}0) - \psi(z{=}h) \\
&= C + \frac{1}{3}\frac{U_0}{h^2}h^3 - C \\
&= \frac{1}{3}U_0 h.
\end{aligned}
$$

b) $\boldsymbol{v} = u(z)\boldsymbol{i}, \quad u(z) = U_0 \ln\left(\frac{z+h}{h}\right), \quad 0 \le z \le h, \quad U_0 = \text{konstant}, \quad h = \text{konstant}.$

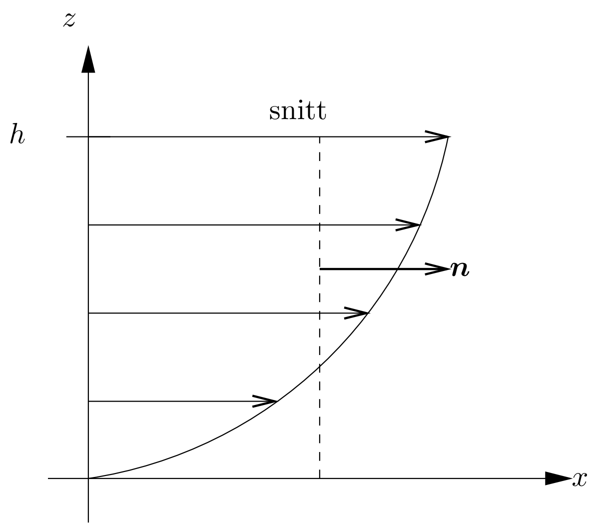
Vi antar at problemet er to-dimensjonalt i xz-planet.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Virvling:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{j} = \frac{U_0}{z+h}\boldsymbol{j}.$$



Figur 4.3: Vindprofilet til $\boldsymbol{v} = U_0 \ln\left(\frac{z+h}{h}\right)\boldsymbol{i}$.

Strømfunksjonen $\psi(x,z)$ finner vi ved å løse likningssystemet

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -u \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = w. \tag{4.4}$$

Fra (4.4) får vi

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \psi(z).$$

Vi setter inn for u i (4.3) og integrerer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial z} &= -U_0 \ln\left(\frac{z+h}{h}\right) \\ \Rightarrow \quad \psi(z) &= -U_0 \int \ln u \, dz \end{aligned}$$

der

$$u = \frac{z+h}{h}, \qquad \frac{du}{dz} = \frac{1}{h}, \qquad dz = h\,du.$$

Videre blir strømfunksjonen

$$\begin{aligned} \psi(z) &= -U_0 h \int \ln u \, du \\ &= -U_0 h\left[u \ln u - \int \frac{u}{u}\, du\right] + C \\ &= -U_0 h\Big[u\big(\ln u - 1\big)\Big] + C \\ &= -U_0 \big(z+h\big)\left[\ln\left(\frac{z+h}{h}\right) - 1\right] + C. \end{aligned}$$

Vi har her brukt substitusjon og delvis integrasjon til å løse integralet. Siden ψ her er en funksjon av bare z får vi en integrasjonskonstant C i stedet for en funksjon $f(x)$. Strømlinjene finner vi ved å sette $\psi = \psi_0 =$ konstant. Siden $\psi = \psi_0$ inneholder kun en variabel, z, og resten konstanter, får vi at $z =$ konstant som gir rette horisontale linjer som i oppgave a (se figur 4.2).

Volumstrømmen er gitt ved

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma$$

der $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$ er en normalvektor til snittet (se figur 4.3). $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i} = u(z)$ slik at vi får

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^h u(z)\, dz \\
&= U_0 \int_0^h \ln\left(\frac{z+h}{h}\right) dz \\
&= \left[U_0\big(z+h\big)\left[\ln\left(\frac{z+h}{h}\right) - 1\right]\right]_0^h \\
&= 2U_0 h\big(\ln 2 - 1\big) - U_0 h\big(\ln 1 - 1\big) \\
&= U_0 h\big(2\ln 2 - 1\big).
\end{aligned}$$

Vi skal til slutt vise at volumstrømmen er lik differansen i strømfunksjonens verdi mellom bakken og $z = h$:

$$\begin{aligned}
Q &= \psi(z{=}0) - \psi(z{=}h) \\
&= -U_0 h\left[\ln\left(\frac{h}{h}\right) - 1\right] + C + U_0 2h\left[\ln\left(\frac{2h}{h}\right) - 1\right] - C \\
&= U_0 h + 2U_0 h\big(\ln 2 - 1\big) \\
&= U_0 h\big(2\ln 2 - 1\big).
\end{aligned}$$

Oppgave 3

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= ax^2\boldsymbol{i} + v(x,y)\boldsymbol{j} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2ax + \frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Skal feltet være divergensfritt må

$$\begin{aligned}
2ax + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= -2ax.
\end{aligned}$$

Vi integrerer med hensyn på y:

$$v(x,y) = -2axy + f(x).$$

Feltet er nå divergensfritt for et hvert valg av $f(x)$. Videre i oppgaven skal vi begrense oss til tilfellet $v(0,0) = 0$, da må vi velge $f(x) = 0$, slik at

$$\boldsymbol{v} = ax^2\boldsymbol{i} - 2axy\boldsymbol{j}.$$

Strømfunksjonen $\psi(x,y)$ kan vi finne fra likningene

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -u \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v. \tag{4.6}$$

Dette gir

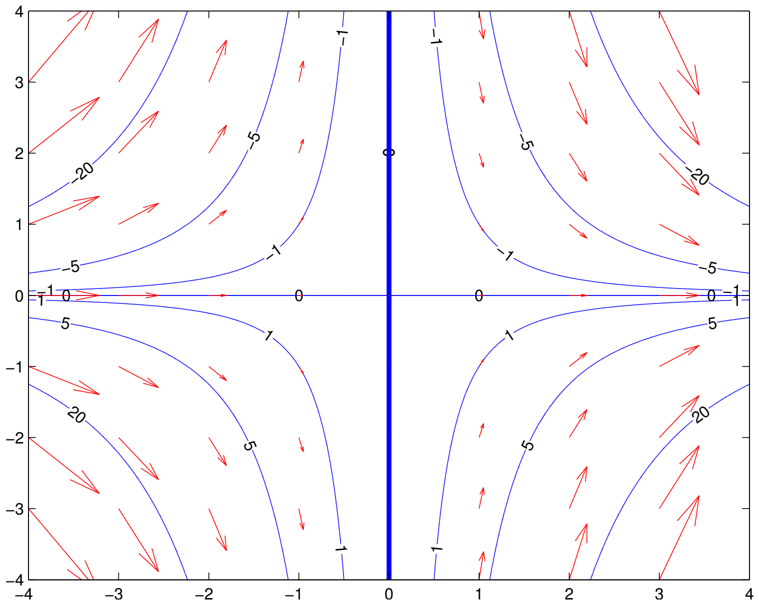
$$\begin{aligned}
(4.5): \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -ax^2 \quad \Rightarrow \quad \psi(x,y) = -ax^2y + f_1(x) \\
(4.6): \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -2axy \quad \Rightarrow \quad \psi(x,y) = -ax^2y + f_2(y).
\end{aligned}$$

For å få en mulig ψ må vi velge $f_1(x) = f_2(y) = C$, og strømfunksjonen blir

$$\psi(x,y) = -ax^2y + C.$$

Strømlinjene finner vi ved å sette $\psi = \psi_0$:

$$y = \frac{C - \psi_0}{ax^2} = \frac{C}{x^2}.$$



Figur 4.4: Vektorfeltet $\boldsymbol{v} = ax^2\boldsymbol{i} - 2axy\boldsymbol{j}$ med strømlinjer for $a = 1$. Strømlinjen som går gjennom origo og langs y-aksen er markert med litt tykkere linje for å understreke at her er hastighetsfeltet lik null $\boldsymbol{v}(0,y) = 0$.

Oppgave 4

Vi skal finne volumstrømmen til vektorfeltet

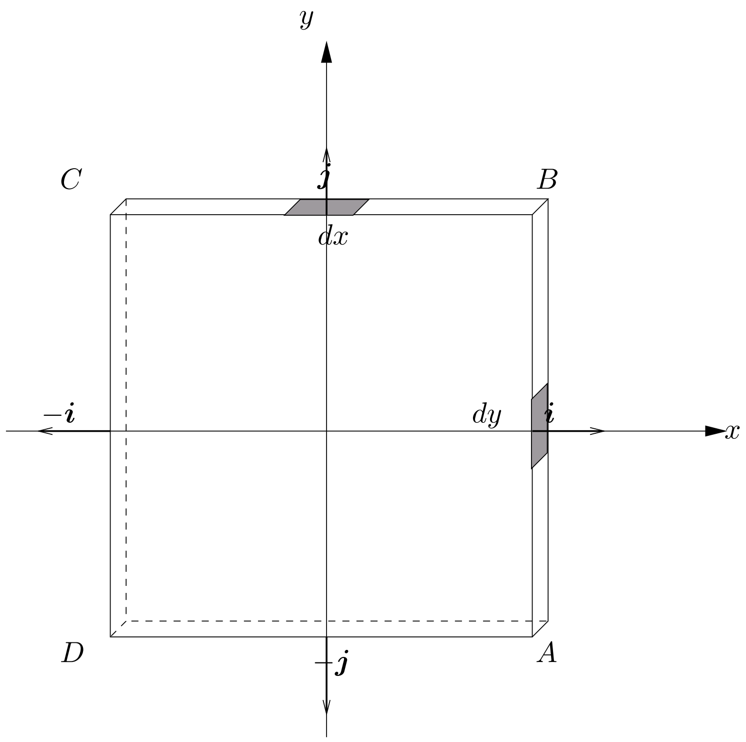
$$\boldsymbol{v} = 3x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

gjennom et rektangel med sentum i origo og sidekanter Δx og Δy (se figur 4.5). Volumstrømmen er definert som

$$\Delta Q = \int_\sigma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$$

der σ er den samlede overflaten til sidekantene og $d\sigma$ er et lite flateelement med normalvektor $\boldsymbol{n}$. Vi deler opp rektangelet i fire deler:

$$\Delta Q = \int_{AB} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{BC} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{CD} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{DA} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$



Figur 4.5: Et rektangel med sidekanter Δx og Δy. Vi antar at tykkelsen er lik en.

AB: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$, $\quad x = \Delta x/2$, $\quad d\sigma = dy\cdot 1$:

$$\int_{AB} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} 3x\,dy = \frac{3\Delta x}{2}\int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{3}{2}\Delta x\Delta y.$$

BC: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$, $\quad y = \Delta y/2$, $\quad d\sigma = dx\cdot 1$:

$$\int_{BC} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} y\,dx = \frac{\Delta y}{2}\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx = \frac{1}{2}\Delta x\Delta y.$$

CD: $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}, \quad x = -\Delta x/2, \quad d\sigma = dy \cdot 1$:

$$\int_{CD} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -3x\, dy = \frac{3\Delta x}{2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{3}{2}\Delta x \Delta y.$$

DA: $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}, \quad y = -\Delta y/2, \quad d\sigma = dx \cdot 1$:

$$\int_{DA} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} -y\, dx = \frac{\Delta y}{2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx = \frac{1}{2}\Delta x \Delta y.$$

Legger vi sammen disse leddene får vi

$$\Delta Q = 4\Delta x \Delta y.$$

Volumstrømmen per arealenhet blir

$$Q = \frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta y} = 4.$$

Vi kontrollerer ved å beregne divergensen:

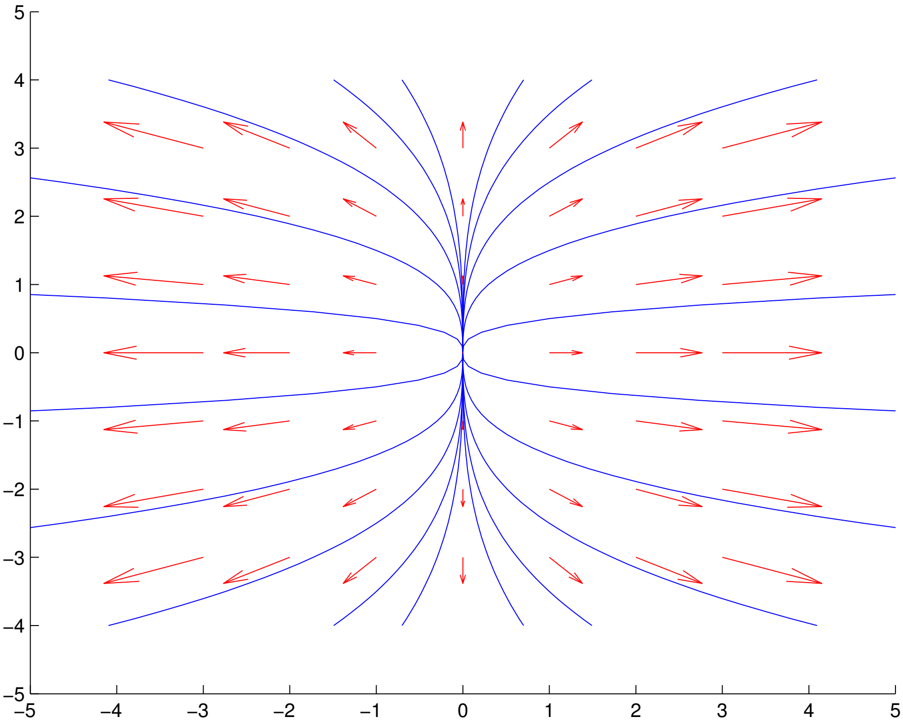
$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 3 + 1 = 4.$$

For at en strømfunksjon skal kunne eksistere må vi ha et to-dimensjonalt divergensfritt felt. Divergensen er her 4, altså eksisterer det ikke noen strømfunksjon for dette feltet, men vi kan alltid finne strømlinjene ved

$$\begin{aligned}
u\, dy &= v\, dx \\
3x\, dy &= y\, dx \\
\frac{dy}{y} &= \frac{dx}{3x} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{3x} \\
\ln|y| &= \frac{1}{3}\ln|x| + A \\
e^{\ln|y|} &= e^{\frac{1}{3}\ln|x| + A} \\
e^{\ln|y|} &= e^{\ln|x|^{\frac{1}{3}}} \cdot e^{A} \\
y &= Cx^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 5

Vi har gitt det to-dimensjonale vektorfeltet $\boldsymbol{v} = ax\boldsymbol{i}$, der a er en konstant.



Figur 4.6: Strømlinjene til feltet $\boldsymbol{v} = 3x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$.

a) Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = a.$$

b) Vi skal beregne volumstrømmen, $\Delta Q = \int_\sigma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$, gjennom det samme rektangelet som i oppgave 4 (se figur 4.5). Vi deler også her opp integralet i fire deler:

AB: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}, \quad x = \Delta x/2, \quad d\sigma = dy \cdot 1$:

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int\limits_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} ax\, dy = \frac{a\Delta x}{2} \int\limits_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{a}{2}\Delta x \Delta y.$$

BC: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}, \quad y = \Delta y/2, \quad d\sigma = dx \cdot 1$:

$$\int\limits_{BC} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int\limits_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j}\, dx = 0.$$

CD: $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}, \quad x = -\Delta x/2, \quad d\sigma = dy \cdot 1$:

$$\int\limits_{CD} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int\limits_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -ax\, dy = \frac{a\Delta x}{2} \int\limits_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{a}{2}\Delta x \Delta y.$$

DA: $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}, \quad y = -\Delta y/2, \quad d\sigma = dx \cdot 1$:

$$\int_{DA} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \;=\; \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \boldsymbol{v} \cdot (-\boldsymbol{j})\, dx \;=\; 0.$$

Volumstrømmen blir

$$\Delta Q = a\Delta x \Delta y.$$

c) Sammenlikner vi resultatene fra oppgave a og b får vi

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta y}.$$

Divergensen er altså lik volumstrømmen per arealenhet.

Oppgave 6

Et to-dimensjonalt strømfelt i xy-planet er gitt ved $\boldsymbol{v} = -ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j}$, der a er en konstant.

a) Virvlingen:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -ay & ax & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(0-0) - \boldsymbol{j}(0-0) + \boldsymbol{k}(a+a) = 2a\boldsymbol{k}.$$

b) Sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ langs den lukkede kurven λ er definert ved

$$\Delta C = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$$

der $d\boldsymbol{r}$ er et lite buelement. Vi deler linjeintegralet inn i fire deler (se figur 4.7):

$$\Delta C = \int_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{BC} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{CD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{DA} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

AB: $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}\, dy, \quad x = \Delta x/2$:

$$\int_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \;=\; \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} (-ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{j}\, dy \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \Delta y.$$

BC: $d\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{i}\, dx, \quad y = \Delta y/2$:

$$\int_{BC} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \;=\; \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (-ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j}) \cdot (-\boldsymbol{i})\, dx \;=\; \frac{a}{2}\Delta y \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \Delta y.$$

CD: $d\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{j}\, dy, \quad x = -\Delta x/2$:

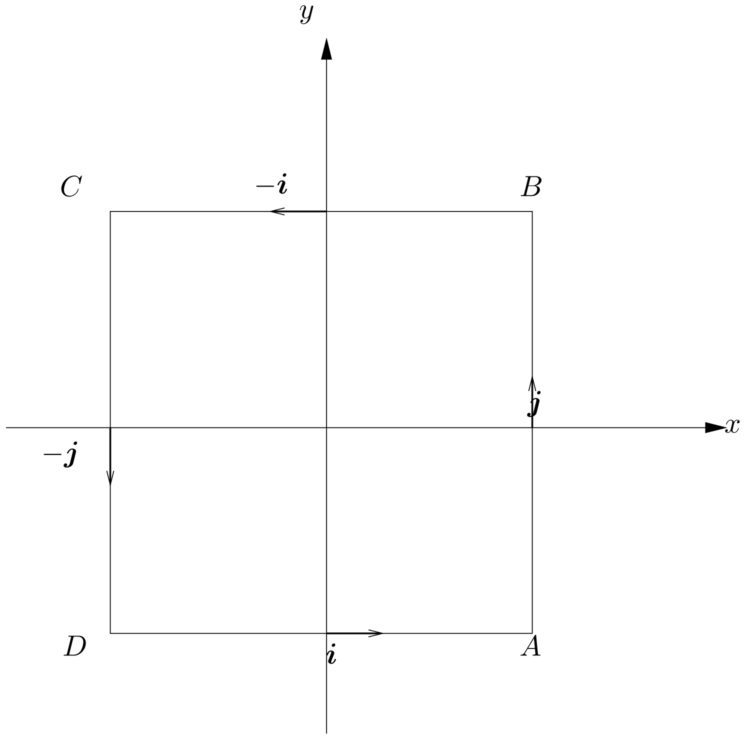
$$\int_{CD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \;=\; \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} (-ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j}) \cdot (-\boldsymbol{j})\, dy \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \Delta y.$$

DA: $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,dx, \quad y = -\Delta y/2$:

$$\int_{DA} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (-ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j})\cdot \boldsymbol{i}\,dx = \frac{a}{2}\Delta y \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx = \frac{a}{2}\Delta x\Delta y.$$

Sammen gir disse leddene sirkulasjonen:

$$\Delta C = 2a\Delta x\Delta y.$$



Figur 4.7: Et rektangel med sidekanter Δx og Δy.

c) Sammenhengen mellom sirkulasjonen og virvlingen:

$$|\nabla\times\boldsymbol{v}| = \frac{\Delta C}{\Delta x\Delta y}.$$

Virvlingens størrelse er altså lik sirkulasjonen per arealenhet.

Oppgave 7

Vi har gitt et to-dimensjonalt strømfelt i xy-planet: $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + v_y(x,y)\boldsymbol{j}$.

a) For at feltet skal være divergensfritt må vi kreve $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{v} &= y + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -y \\ \Rightarrow \quad v_y(x,y) &= -\frac{1}{2}y^2 + f_1(x). \end{aligned}$$

Hvis feltet skal være virvelfritt må $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ xy & v_y(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - x\right)\boldsymbol{k} \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} &= x \\
\Rightarrow \quad v_y(x,y) &= \frac{1}{2}x^2 + f_2(y).
\end{aligned}$$

For å få en mulig $v_y(x,y)$ må vi velge $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ og $f_2(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C$ hvor C er en vilkårlig konstant, slik at

$$\begin{aligned}
v_y(x,y) &= \frac{1}{2}\big(x^2 - y^2\big) + C \\
\boldsymbol{v} &= xy\boldsymbol{i} + \big(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C\big)\boldsymbol{j}.
\end{aligned}$$

b) Strømfunksjonen $\psi(x,y)$ er gitt ved likningene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= -xy \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= v_y = \frac{1}{2}\big(x^2 - y^2\big) + C.
\end{aligned}$$

Integrasjon av likningene med hensyn på henholdsvis y og x gir

$$\begin{aligned}
\psi(x,y) &= -\frac{1}{2}xy^2 + f_1(x) \\
\psi(x,y) &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + Cx + f_2(y).
\end{aligned}$$

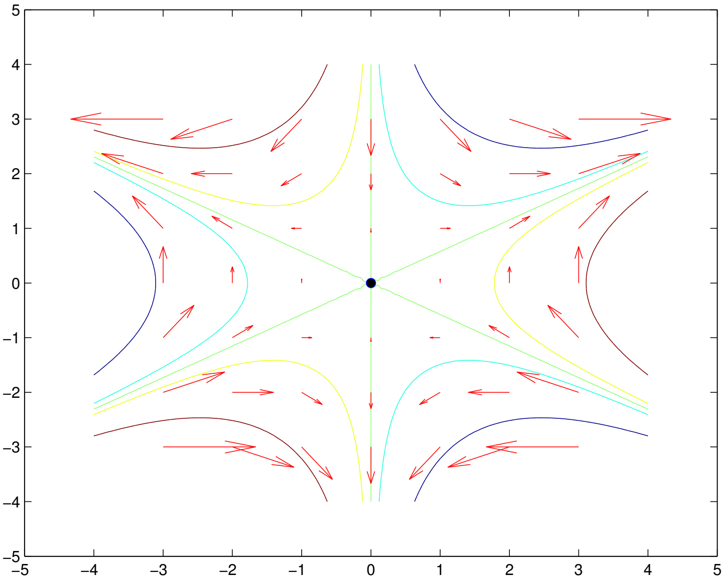
En mulig løsning krever at vi velger $f_1(x) = \frac{1}{6}x^3 + Cx + D$ og $f_2(y) = D$ hvor D er en vilkårlig konstant. Strømfunksjonen blir da

$$\psi(x,y) = -\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}x^3 + Cx + D.$$

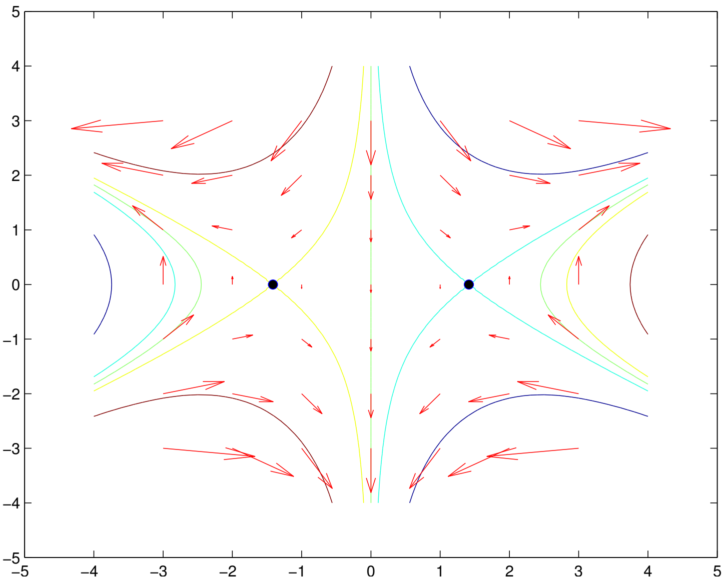
Strømlinjene finner vi ved å sette $\psi = \psi_0 =$ konstant. For eksempel, for $\psi_0 = D$ og $C = 0$ får vi de tre rette linjene

$$x = 0, \quad y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

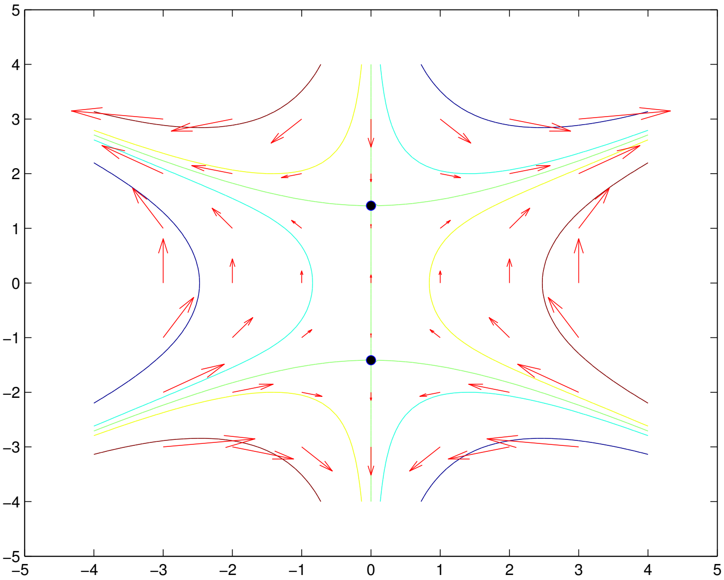
Det er interessant å finne stagnasjonspunktene til vektorfeltet, der hvor $\boldsymbol{v} = 0$. Vi må skille mellom tre kvalitativt forskjellige tilfeller: $C < 0$ gir to stagnasjonspunkt langs x-aksen, $C = 0$ gir ett stagnasjonspunkt i origo, og $C > 0$ gir to stagnasjonspunkt langs y-aksen.



Figur 4.8: Strømlinjene til feltet $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\boldsymbol{j}$. Stagnasjonspunktet er vist med et kulepunkt.



Figur 4.9: Strømlinjene til feltet $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + (\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 1)\boldsymbol{j}$. Stagnasjonspunktene er vist med to kulepunkt.



Figur 4.10: Strømlinjene til feltet $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 1\right)\boldsymbol{j}$. Stagnasjonspunktene er vist med to kulepunkt.

Oppgave 8

For et vilkårlig skalarfelt $\beta = \beta(x, y, z)$ har vi

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

og

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla\beta &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) \\
&= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}\right).
\end{aligned}$$

For partielt deriverte gjelder det generelt at

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial x}, \qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial x}, \qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial y}$$

slik at

$$\nabla \times \nabla\beta = 0.$$

Oppgave 9

a) Stagnasjonsstrøm:

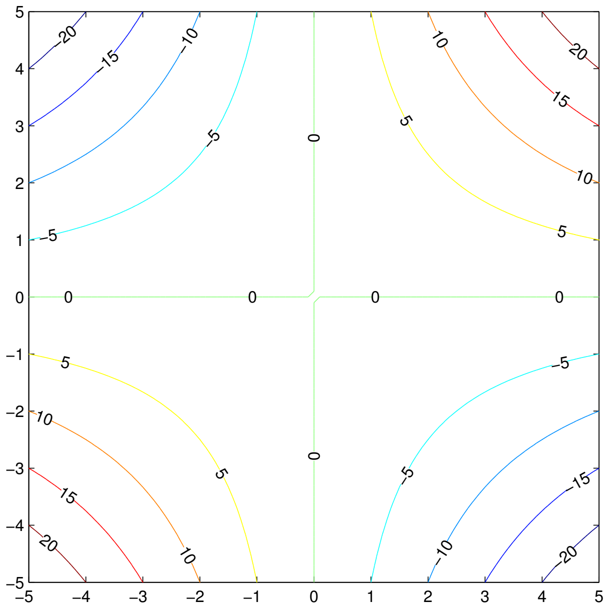
```
[x,y] = meshgrid(-5:.1:5);
psi = x.*y;
[C,h] = contour(x, y, psi);
clabel(C, h)
axis square
```

b) Punktvirvelfelt:

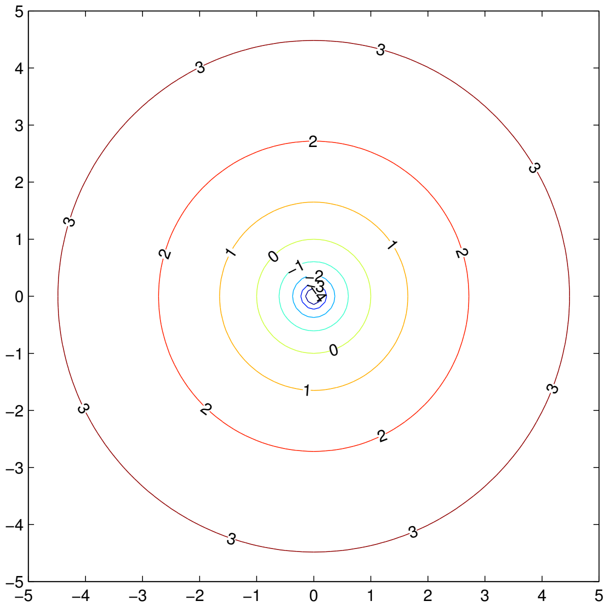
```
[x,y] = meshgrid(-5:.1:5);
psi = 2*log(sqrt(x.^2 + y.^2));
[C,h] = contour(x, y, psi);
clabel(C, h)
axis square
```

c) Dipolfelt:

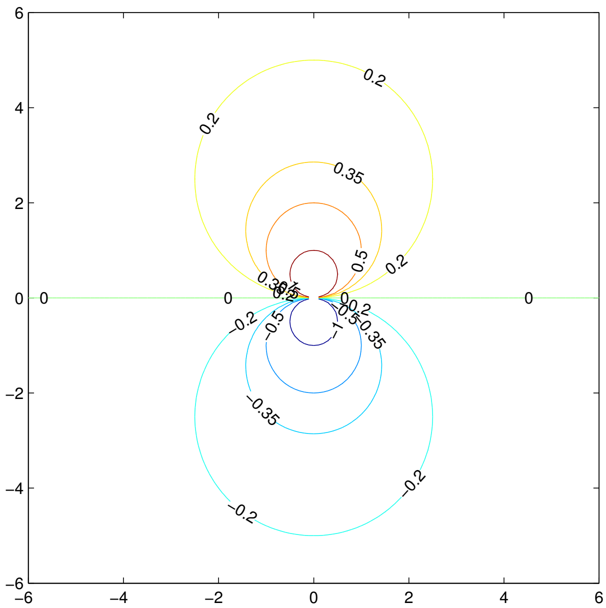
```
[x,y] = meshgrid(-6:.1:6);
psi = y./(x.^2 + y.^2);
[C,h] = contour(x, y, psi, [-1 -.5 -.35 -.2 0 .2 .35 .5 1]);
clabel(C, h)
axis square
```



Figur 4.11: Stagnasjonsstrøm $\psi(x, y) = xy$.



Figur 4.12: Punktvirvelfeltet $\psi(x, y) = 2 \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.



Figur 4.13: Dipolfeltet $\psi(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

Kapittel 6

Kurve-, flate- og volumintegraler, beregning av trykkraft

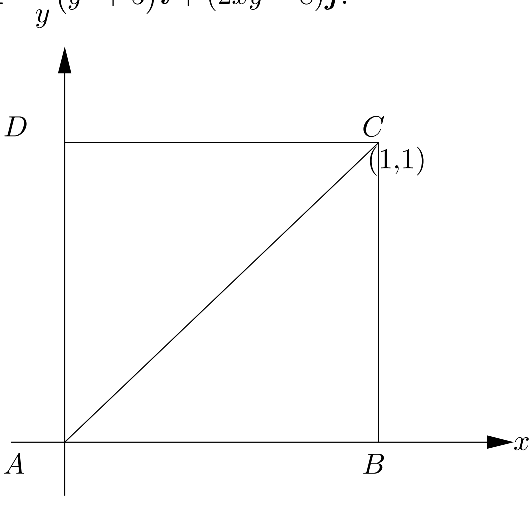
Oppgave 1

Vi skal regne ut kurveintegralet $\int_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$ langs kurven λ: $y = x^3$ når $-1 \le x \le 2$ og $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$. Vi kan parametrisere med x som parameter, $\boldsymbol{r}(x) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = x\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j}$, hvor $-1 \le x \le 2$. Da får vi $d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i} + 3x^2\boldsymbol{j})\, dx$. Når parametriseringen settes inn i uttrykket for $\boldsymbol{v}$ får vi $\boldsymbol{v} = x^4\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$. Vi setter dette inn i integralet:

$$\int_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-1}^{2} \left(x^4 + 3x^4\right) dx = \frac{132}{5}.$$

Oppgave 2

Et kraftfelt er gitt ved $\boldsymbol{F} = \left(y^2 + 5\right)\boldsymbol{i} + (2xy - 8)\boldsymbol{j}$.



Figur 6.1: Et kvadrat $ABCD$ i xy-planet.

ABC:

$$W = \int\limits_{ABC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{AB} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{BC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

AB: Parametrisering $\boldsymbol{r}(x) = x\boldsymbol{i}$ for $0 \leq x \leq 1$, da er $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx$ og $y = 0$:

$$\int_{AB} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 5\, dx = 5.$$

BC: Parametrisering $\boldsymbol{r}(y) = \boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ for $0 \leq y \leq 1$, da er $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}dy$ og $x = 1$:

$$\int_{BC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (2y - 8)\, dy = -7.$$

Arbeidet blir $W = 5 - 7 = -2$.

ADC:

$$W = \int_{ADC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{AD} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{DC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

AD: Parametrisering $\boldsymbol{r}(y) = y\boldsymbol{j}$ for $0 \leq y \leq 1$, da er $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}dy$ og $x = 0$:

$$\int_{AD} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_0^1 8\, dy = -8.$$

DC: Parametrisering $\boldsymbol{r}(x) = x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ for $0 \leq x \leq 1$, da er $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx$ og $y = 1$:

$$\int_{DC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 6\, dx = 6.$$

Arbeidet blir $W = -8 + 6 = -2$.

AC: Parametrisering $\boldsymbol{r}(s) = s(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$ for $0 \leq s \leq 1$, da er $d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})ds$:

$$W = \int_{AC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (s^2 + 5) + (2s^2 - 8)\, ds = \int_0^1 3s^2 - 3\, ds = -2.$$

Skal kraften kunne skrives som gradienten til et potensial $V = V(x, y)$ må vi ha $\boldsymbol{F} = -\nabla V$ som gir vektorlikningen

$$\left(y^2 + 5\right)\boldsymbol{i} + (2xy - 8)\boldsymbol{j} = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -y^2 - 5 \qquad \Rightarrow \qquad V(x, y) = -xy^2 - 5x + f_1(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2xy + 8 \qquad \Rightarrow \qquad V(x, y) = -xy^2 + 8y + f_2(x).$$

For å få en entydig løsning må vi velge $f_1(y) = 8y + C$ og $f_2(x) = -5x + C$. slik at

$$V(x, y) = -xy^2 - 5x + 8y + C.$$

Vi kan nå regne ut arbeidet ved hjelp av potensialet:

$$W = -\int_{AC} \nabla V \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{AC} dV = V(0, 0) - V(1, 1).$$

- Punktet C: $V(1,1) = -1 - 5 + 8 + C = 2 + C$.
- Punktet A: $V(0,0) = C$.

$$W = V(0,0) - V(1,1) = C - 2 - C = -2.$$

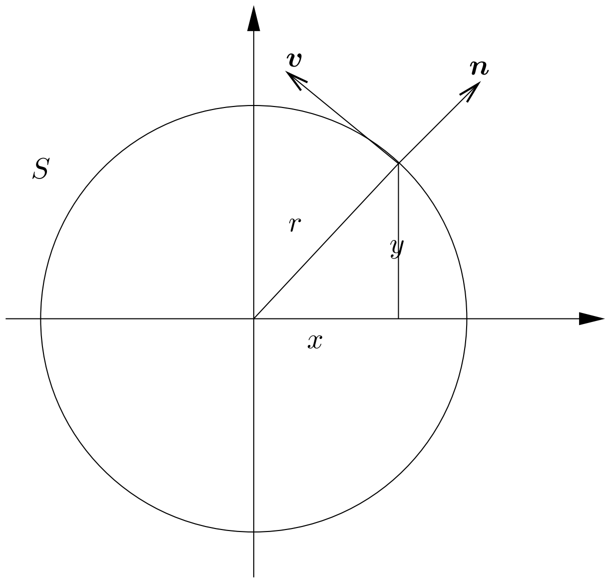
Oppgave 3

En sirkel S i xy-planet er gitt ved $x^2 + y^2 = r^2$. Sirkelen kan betraktes som en ekviskalarkurve til funksjonen $f(x,y) = x^2 + y^2$, en normalvektor til kurven kan skrives som $\nabla f(x,y) = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$ (se figur 6.2). For at normalvektoren skal få lengde lik én må vi normalisere:

$$\boldsymbol{n} = \frac{2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j}.$$

Vi har nå gitt vektorfeltet

$$\boldsymbol{v} = -\frac{Ay}{r^2}\boldsymbol{i} + \frac{Ax}{r^2}\boldsymbol{j}, \quad A > 0.$$



Figur 6.2: En sirkel S i xy-planet.

a) Strømhastigheten er tangensial til sirkelen hvis $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{Ay}{r^2}\frac{x}{r} + \frac{Ax}{r^2}\frac{y}{r} = -\frac{Axy}{r^3} + \frac{Axy}{r^3} = 0.$$

Strømhastighetens størrelse:

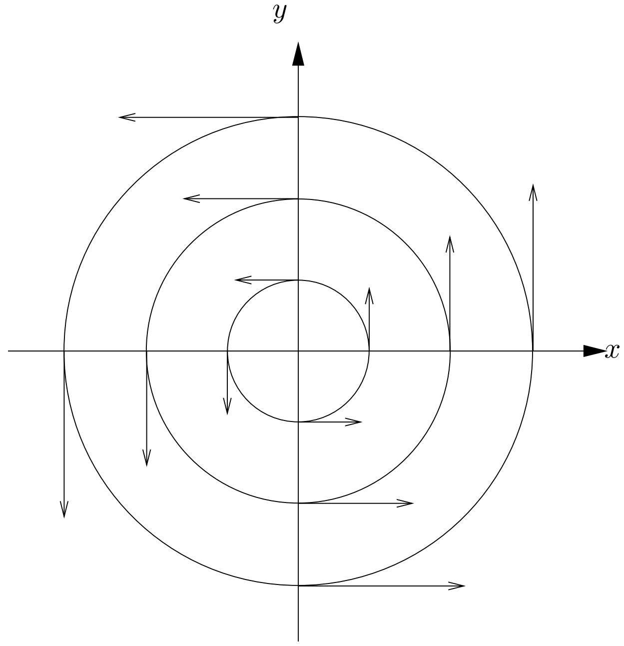
$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\frac{A^2y^2}{r^4} + \frac{A^2x^2}{r^4}} = \sqrt{\frac{A^2(x^2+y^2)}{r^4}} = \frac{A}{r}.$$

(Langs sirkelen er r konstant.)

b) For å vise at strømfunksjonen eksisterer kan vi enten regne den ut, eller vi kan sjekke at $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Vis at den er divergensfri!

Siden $\boldsymbol{v}$ er divergensfri og er todimensjonal i xy-planet så vet vi at det eksisterer en strømfunksjon $\psi(x, y)$ som oppfyller likningene $v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ og $v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Vi løser disse og finner $\psi(x, y) = A \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \alpha$ hvor α er en vilkårlig konstant.

Strømlinjene framkommer som ekviskalarkurver for strømfunksjonen, $\psi(x, y) =$ konstant. Disse kan skrives som $x^2 + y^2 =$ konstant, og vi ser at de er sirkler med sentrum i origo.



Figur 6.3: Strømlinjene til $\boldsymbol{v} = -\dfrac{Ay}{r^2}\boldsymbol{i} + \dfrac{Ax}{r^2}\boldsymbol{j}$ er sirkler med sentrum i origo

c) Langs sirkelen S er $\boldsymbol{v}$ og $d\boldsymbol{r}$ parallelle. Vinkelen mellom $\boldsymbol{v}$ og $d\boldsymbol{r}$ er 0, og vi husker at $\cos 0 = 1$. Da blir skalarproduktet $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{v}|\,|d\boldsymbol{r}|$ der $|\boldsymbol{v}| = A/r$ og $|d\boldsymbol{r}| = ds$. Linjeintegralet blir nå

$$C = \oint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{A}{r} \oint_S ds = \frac{A}{r} 2\pi r = 2\pi A.$$

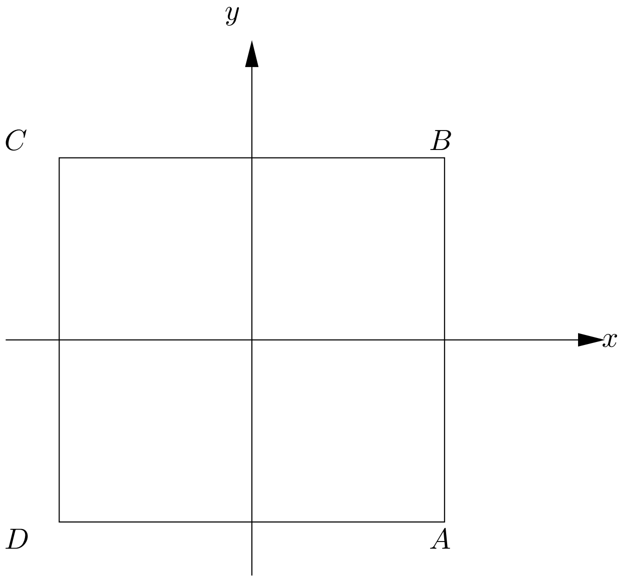
C kalles for sirkulasjonen.

d) Linjeintegralet rundt et kvadrat $ABCD$ (se figur 6.4) kan deles opp i fire deler:

$$C = \oint\limits_{ABCD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{BC} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{CD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{DA} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Langs linjestykket fra A til B kan vi velge parametriseringen $\boldsymbol{r}(y) = \boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ for $-1 \le y \le 1$, og vi har at $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}\,dy$ og $x = 1$:

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{A}{1 + y^2}\,dy = \Big[A \arctan y\Big]_{-1}^{1} = \frac{A\pi}{4} + \frac{A\pi}{4} = \frac{A\pi}{2}.$$



Figur 6.4: Et kvadrat med sentrum i origo og sidekanter lik 2.

Tilsvarende utregning langs de andre sidekantene gir

$$\int_{AB} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{BC} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{CD} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{DA} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Sirkulasjonen blir altså

$$C = 4\,\frac{A\pi}{2} = 2\pi A.$$

Oppgave 4

a) Den hydrostatiske trykkformelen er gitt ved $p = p_0 + \rho g z$. Trykkraften kan skrives som

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -\int_\sigma p\boldsymbol{n}\,d\sigma \\ &= -\int_{\sigma_{\text{topp}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma - \int_{\sigma_{\text{bunn}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma - \int_{\sigma_{\text{side}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma. \end{aligned}$$

På toppflaten er $z = d$ og $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$:

$$-\int_{\sigma_{\text{topp}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma = (p_0 + \rho g d)\boldsymbol{k}\int_{\sigma_{\text{topp}}} d\sigma = (p_0+\rho g d)\pi a^2\boldsymbol{k}.$$

På bunnflaten er $z = d + l$ og $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$:

$$-\int_{\sigma_{\text{bunn}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma = -\big(p_0 + \rho g(d+l)\big)\boldsymbol{k}\int_{\sigma_{\text{bunn}}} d\sigma = -\big(p_0 + \rho g(d+l)\big)\pi a^2\boldsymbol{k}.$$

På grunn av symmetri blir $\int_{\sigma_{\text{side}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma = 0$, dette kan for øvrig regnes ut direkte ved å parametrisere sideflaten:

$$\boldsymbol{r}(\theta, z) = a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad \text{for} \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad \text{og} \quad d \le z \le d + l$$

Da får vi

$$\boldsymbol{n}d\sigma = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial z} d\theta dz = (a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j})d\theta dz$$

Kraften på siden blir da

$$-\int_{\sigma_{\text{side}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma = -\int_d^{d+l}\int_0^{2\pi}(p_0 + \rho gz)(a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j})d\theta dz = 0$$

Den total trykkraften blir nå

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \Big[(p_0 + \rho gd)\pi a^2 - \big(p_0 + \rho g(d+l)\big)\pi a^2\Big]\boldsymbol{k} \\
&= -\rho gl\pi a^2\boldsymbol{k} \\
&= -Mg\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

der $M = \rho l\pi a^2$ er massen til væsken fortrengt av sylinderen.

b) Oppgaveteksten ber oss om å gjette, da kan vi nøye oss med å bruke Arkimedes prinsipp som sier at trykkraften (oppdriften) er lik vekten av den fortrengte væsken:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= -Mg\boldsymbol{k}, \quad M = \rho\frac{4}{3}\pi a^3 \\
&= -\frac{4}{3}\rho g\pi a^3\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Svaret kunne også ha blitt regnet ut direkte som et flateintegral ved å anvende kulekoordinater, eller det kan enda lettere regnes ut indirekte ved å anvende Gauss sats (da er det tilstrekkelilg å huske formelen for volumet av ei kule). For å regne det ut direkte som et flateintegral kan vi parametrisere

$$\boldsymbol{r}(\theta, \varphi) = a\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + a\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + (a\cos\theta + d)\boldsymbol{k} \qquad \text{for} \quad 0 \le \theta \le \pi \quad \text{og} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

hvor vi har antatt at sentrum i kula ligger posisjon $z = d$. Vi får da

$$\boldsymbol{n}d\sigma = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi} d\theta d\varphi = a^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k})d\theta d\varphi$$

Trykkraften er

$$\begin{aligned}
-\int_{\sigma} p\boldsymbol{n}\,d\sigma &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(p_0 + \rho g(d + a\cos\theta))a^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k})d\theta d\varphi \\
&= -\frac{4}{3}\rho g\pi a^3\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

Oppgave 5

a)

$$
\begin{aligned}
\iiint_{\tau} 3xye^{z}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}} 3xye^{z}\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^1\int_0^2 \left[\frac{3}{2}x^2ye^{z}\right]_0^{1/2} dy\,dz \\
&= \int_0^1\int_0^2 \frac{3}{8}ye^{z}\,dy\,dz \\
&= \int_0^1 \left[\frac{3}{16}y^2e^{z}\right]_0^{2} dz \\
&= \int_0^1 \frac{3}{4}e^{z}\,dz = \frac{3}{4}(e-1).
\end{aligned}
$$

b)

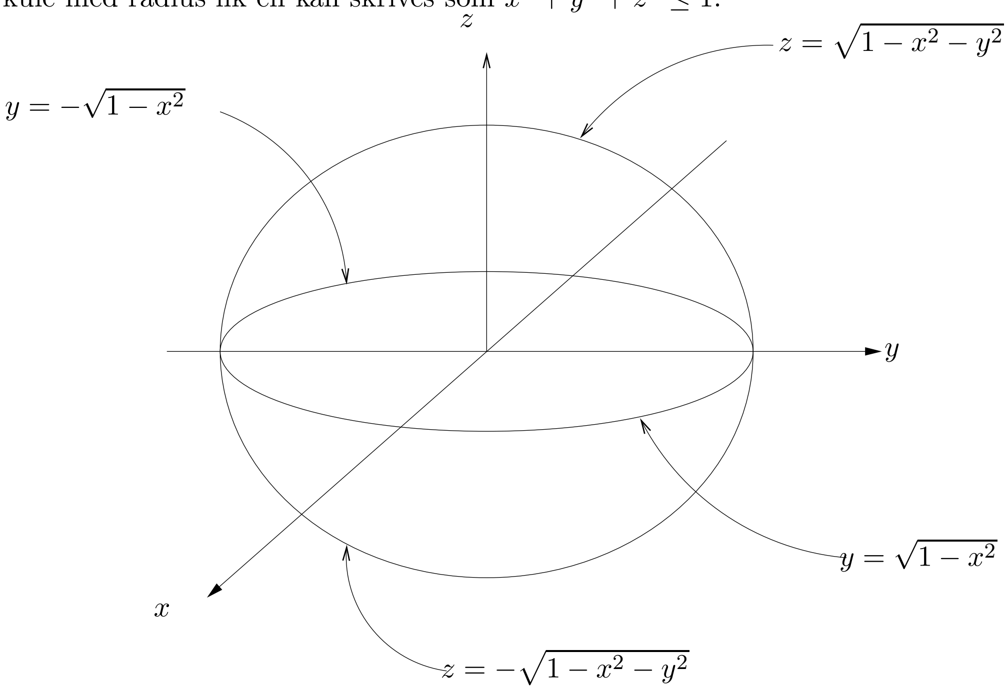
$$
\begin{aligned}
\iiint_{\tau} 3xye^{z}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1} 3xye^{z}\,dz\,dx\,dy \\
&= \int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[3xye^{z}\right]_0^{1} dx\,dy \\
&= \int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}} 3xy(e-1)\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{3}{2}x^2y(e-1)\right]_0^{1/2} dy \\
&= \int_0^2 \frac{3}{8}y(e-1)\,dy \\
&= \left[\frac{3}{16}y^2(e-1)\right]_0^{2} = \frac{3}{4}(e-1).
\end{aligned}
$$

Oppgave 6

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^x\int_0^y \left(x^2+3xy-z^2\right) dz\,dy\,dx &= \int_0^1\int_0^x \left[x^2z+3xyz-\frac{1}{3}z^3\right]_0^y dy\,dx \\
&= \int_0^1\int_0^x \left(x^2y+3xy^2-\frac{1}{3}y^3\right) dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2+xy^3-\frac{1}{12}y^4\right]_0^x dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4+x^4-\frac{1}{12}x^4\right) dx \\
&= \frac{17}{12}\int_0^1 x^4\,dx \\
&= \frac{17}{60}.
\end{aligned}
$$

Oppgave 7

En kule med radius lik én kan skrives som $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.



Figur 6.5: En kule med radius lik en.

a)

$$\begin{aligned}
-1 \leq & \quad x \quad \leq 1 \\
-\sqrt{1-x^2} \leq & \quad y \quad \leq \sqrt{1-x^2} \\
-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq & \quad z \quad \leq \sqrt{1-x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

b) Vi har gitt volumet τ: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_\tau dx\,dy\,dz \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big[z\Big]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

Det innerste integralet kan vi uttrykke som

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\,dy, \qquad a = \sqrt{1-x^2}.$$

Dette integralet kan vi finne løsningen til i en integraltabell:

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{y}{a}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a}\right]_{-a}^{a} \\
&= 0 + \frac{a^2}{2}\arcsin 1 - 0 - \frac{a^2}{2}\arcsin(-1) \\
&= \frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2\pi}{4} = \frac{a^2\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vi setter dette resultatet tilbake i volumintegralet:

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}a^2\,dx \\
&= \pi\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) dx \\
&= \pi\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} \\
&= \pi\left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Kapittel 7

Integralsatser: Green, Stokes og Gauss

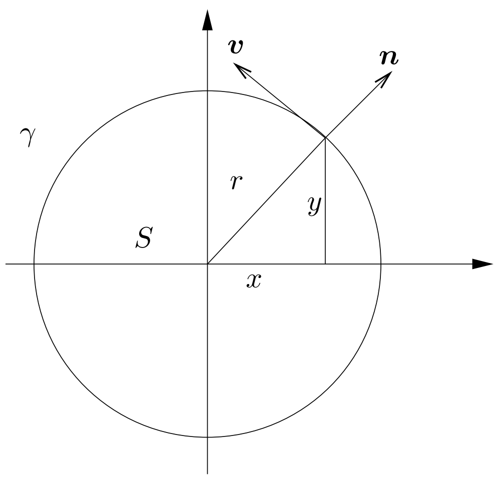
Oppgave 1

Vi har gitt strømfeltet $\boldsymbol{v} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$ der ω er en konstant.

a) Strømfarten:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2} = \omega r, \quad r = x^2 + y^2.$$

Langs sirkelen $r^2 = x^2 + y^2$ er r konstant og dermed også $|\boldsymbol{v}|$ konstant.



Figur 7.1: En sirkel γ som omslutter en sirkelskive S i xy-planet.

Sirkulasjonen er gitt ved likningen

$$C = \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Fra oppgave 3, kapittel 6, har vi enhetsnormalen til en sirkel

$$\boldsymbol{n} = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j}$$

og følgelig

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{\omega yx}{r} + \frac{\omega xy}{r} = 0.$$

Strømfeltet $\boldsymbol{v}$ er altså tangensialt til sirkelen γ. Denne opplysningen kan vi bruke ved beregning av sirkulasjonen:

$$\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \omega r\, ds$$

der ds er et lite element av sirkelen γ. Sirkulasjonen blir

$$C = \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi r} \omega r\, ds = \omega r \int_0^{2\pi r} ds = \omega r\, 2\pi r = 2\pi\omega r^2.$$

Alternativt kan vi parametrisere sirkelen $\boldsymbol{r}(\theta) = \boldsymbol{i} r\cos\theta + \boldsymbol{j} r\sin\theta$ for $0 \le \theta < 2\pi$. Vi får da $d\boldsymbol{r} = r(-\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta)d\theta$ og $\boldsymbol{v} = \omega r(-\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta)$, og følgelig

$$C = \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \omega r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = \omega r^2\, 2\pi.$$

b) Vi regner først ut virvlingen:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\boldsymbol{k}.$$

Integralet av virvlingen over sirkelflaten:

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{v}\, d\sigma = \int_S 2\omega\boldsymbol{k}\, d\sigma = 2\omega\boldsymbol{k} \int_S d\sigma = 2\omega\pi r^2 \boldsymbol{k}.$$

Greens sats:

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$$

der $\boldsymbol{n}$ er normalvektoren til sirkelflaten S (ikke sirkelbuen γ). For sirkelflaten S har vi $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ som er en konstant vektor som eventuelt kan tas utenfor integralet.

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{k}\, d\sigma = 2\pi\omega r^2.$$

c) Siden $|\boldsymbol{v}|$ er konstant for en gitt r, og $\boldsymbol{v}$ er tangent til sirkler med radius r, har vi ved symmetri

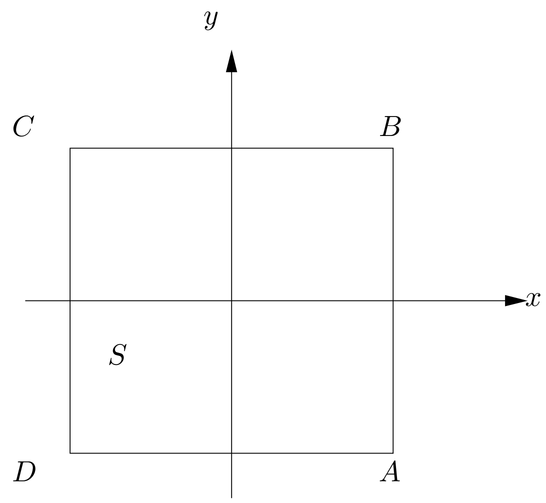
$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{BC} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{CD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{DA} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Sirkulasjonen er derfor gitt ved

$$C = \oint\limits_{ABCD} \boldsymbol{c} \cdot d\boldsymbol{r} = 4 \int\limits_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Langs linjestykket AB er $x = \Delta x/2$, $d\boldsymbol{r} = dy\boldsymbol{j}$ og $-\Delta y/2 \le y \le \Delta y/2$:

$$C = 4 \int\limits_{AB} \omega x\, dy = 4\omega \frac{\Delta x}{2} \int\limits_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} dy = 2\omega \Delta x \Delta y.$$



Figur 7.2: Et kvadrat med sentrum i origo og sidekanter $\Delta x = \Delta y$.

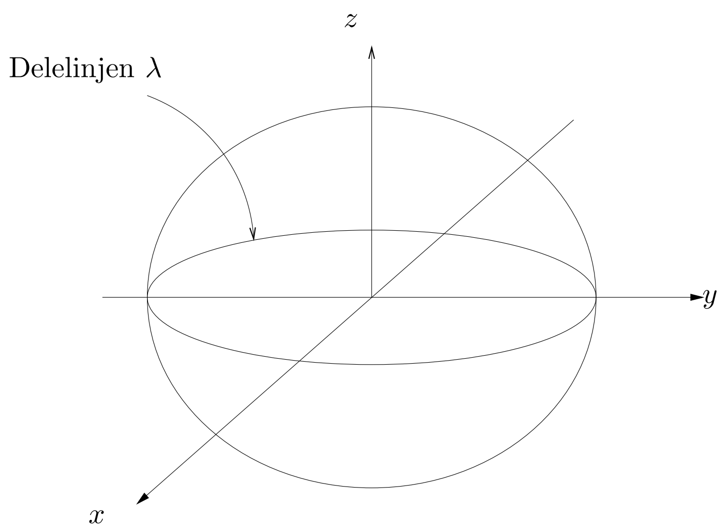
Greens sats:

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \oint_{ABCD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$$

hvor S nå betegner firkantskiven avgrenset av $ABCD$. Den venstre siden over kan nå regnes ut

$$= \int_S 2\omega \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\, d\sigma = 2\omega \int_S d\sigma = 2\omega \Delta x \Delta y.$$

Oppgave 2



a) Stokes' sats:

$$\int_\sigma (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Stokes' sats sier at summen av virvlingsvektoren for hver halvkule er lik sirkulasjonen rundt λ. Siden halvkulene har samme form og volum er lengden av sirkulasjonen lik, men fortegnet ulikt. For hver $\boldsymbol{n}_1$ på den øvre halvkulen har vi en $\boldsymbol{n}_2$ på den nedre halvkulen slik at $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$. Summen av sirkulasjonen av de to halvkulene blir derfor lik null.

b) Radius av jordkloden: 6370 km, atmosfæretykkelsen: 10 km. For en kule med radius 1 meter har vi en atmosfærestørrelse på $\dfrac{10}{6370}$ meter $\approx$ 1 mm. Vi har en tilnærmet to-dimensjonal situasjon og det vil derfor være rimelig å bruke modellen fra oppgave a).

Oppgave 3

Vi har gitt et tre-dimensjonalt strømfelt $\boldsymbol{v} = \alpha(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$ der α er en konstant.

a) Enhets normalvektor er $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ hvor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ og $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vi ser at $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{r}$. Da får vi

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \alpha r \int_\sigma d\sigma = (\alpha r)(4\pi r^2) = 4\alpha\pi r^3.$$

Alternativt bruker vi Gauss' sats:

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\tau = \int_\tau 3\alpha\, d\tau = 3\alpha \int_\tau d\tau$$

der τ er volumet innenfor kuleflaten.

$$Q = 3\alpha \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\alpha\pi r^3.$$

b) Vi antar nå at σ er en vilkårlig flate. Volumstrømmen blir

$$Q = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\tau = 3\alpha\tau$$

der τ er volumet σ omslutter.

Oppgave 4

En vektor med konstant lengde og retning kan skrives som

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$$

der a, b og c er konstanter. Flateintegralet av normalkomponenten av $\boldsymbol{A}$ over en lukket, sammenhengende flate σ kan vi beregne ved å bruke Gauss' sats:

$$\int_\sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, d\tau.$$

Divergensen til $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

og flateintegralet blir følgelig

$$\int_\sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0.$$

Oppgave 5

Flateintegralet av en skalar β ganger enhetsnormalvektor til en lukket, sammenhengende flate σ kan vi beregne ved å bruke Gauss' sats:

$$\int_\sigma \beta \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla\beta\, d\tau.$$

Gradientvektoren $\nabla\beta$:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k} = 0$$

og flateintegralet blir derfor

$$\int_\sigma \beta \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0.$$

Oppgave 6

a) Vi tenker oss at vi deler opp volumet τ i små delvolumer τ_i med overflate σ_i. Trykket på et slikt volum er $-p\boldsymbol{n}_i$, der $\boldsymbol{n}_i$ er flatenormalen til σ_i og minustegnet angir at trykket er rettet inn mot flaten. Trykkraften blir nå $-p\boldsymbol{n}_i\, d\sigma_i$ og hvis vi summerer opp for alle delvolumene og lar $i \to \infty$ (og $d\sigma_i \to 0$) blir den totale trykkraften:

$$\boldsymbol{F} = -\int_\sigma p\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

b) Vi bruker Gauss' sats på trykkraften:

$$\boldsymbol{F} = -\int_\sigma p\boldsymbol{n}\, d\sigma = -\int_\tau \nabla p\, d\tau.$$

Trykket er gitt ved den hydrostatiske trykkformelen $p = p_0 + \rho g z$ og gradientvektoren til p blir $\nabla p = \boldsymbol{k}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho g \boldsymbol{k}$. Vi setter dette inn i uttrykket for trykkraften:

$$\boldsymbol{F} = \rho g \boldsymbol{k} \int_\tau d\tau = \rho g \tau \boldsymbol{k} = m g \boldsymbol{k}$$

der $m = \rho\tau$ er massen av den merkede væsken.

c) Oppdriftskraften (trykkraften $\boldsymbol{F}$) avhenger kun av tettheten til væsken (ρ) og volumet av den fortrengte væsken (τ), ikke av egenskapene til objektet som fortrenger væsken. Trykkraften blir altså uforandret.

Oppgave 7

Et kraftfelt er gitt ved

$$\boldsymbol{F} = (y^2 + 5)\boldsymbol{i} + (2xy - 8)\boldsymbol{j}.$$

a) Kraften må være virvelfri:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + 5 & 2xy - 8 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Kraftpotensialet, V, kan vi finne fra $\boldsymbol{F} = -\nabla V$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -(y^2+5) \qquad \Rightarrow \qquad V(x,y) = -xy^2 - 5x + f_1(y)$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = -(2xy-8) \qquad \Rightarrow \qquad V(x,y) = -xy^2 + 8y + f_2(x).$$

For å få en entydig $V(x,y)$ må vi velge $f_1(y) = 8y + C$ og $f_2(x) = -5x + C$ slik at

$$V(x,y) = -xy^2 - 5x + 8y.$$

b) Arbeidet er gitt ved

$$W = \int_\lambda \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\lambda (y^2+5)\,dx + \int_\lambda (2xy-8)\,dy.$$

$\lambda = OAB$**:**

$$W = \int\limits_{OAB} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{OA} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{AB} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Langs linjen OA er $y = 0$ og $dy = 0$ og langs linjen AB er $x = 1$ og $dx = 0$. Dette gir

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 5\,dx + \int_0^1 (2y-8)\,dy \\ &= 5 + (1-8) \\ &= -2. \end{aligned}$$

$\lambda = OB$**:** Langs linjen fra origo til B er $x = y$ og $dx = dy$ og arbeidet blir

$$\begin{aligned} W &= \int_{OB} (x^2 + 5 + 2x^2 - 8)\,dx \\ &= \int_0^1 (3x^2-3)\,dx \\ &= 1 - 3 \\ &= -2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} W &= \int_{OB} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{OB} \nabla V \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{OB} dV \\ &= -V(1,1) + V(0,0) = 1 + 5 - 8 - C + C = -2. \end{aligned}$$

Arbeidet for en kraft som kan avledes av et kraftpotensiale er uavhengig av veien og kun avhengig av verdien til potensialet i endepunktene.

d) Vektorfluksen til $\boldsymbol{F}$ kan skrives som

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_{OA} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{AB} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{BC} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{CO} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

$$\begin{aligned}
\int_{OA} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma &= \int_0^1 8\,dx = 8\\
\int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma &= \int_0^1 (y^2+5)\,dy = \frac{16}{3}\\
\int_{BC} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma &= \int_0^1 (2x-8)\,dx = -7\\
\int_{CO} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma &= -\int_0^1 (y^2+5)\,dy = -\frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Vektorfluksen blir derfor

$$Q = 8 + \frac{16}{3} - 7 - \frac{16}{3} = 1.$$

La oss bruke Gauss' sats på vektorfluksen:

$$\int_\sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,d\tau.$$

Divergensen til $\boldsymbol{F}$ er $\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0 + 2x$ og vektorfluksen blir

$$Q = \int_\tau 2x\,d\tau.$$

τ er nå en kube med sidekanter lik 1:

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 2x\,dx\,dy\,dz\\
&= \int_0^1\int_0^1 \Big[x^2\Big]_0^1 dy\,dz\\
&= \int_0^1\int_0^1 dy\,dz\\
&= \int_0^1 dz\\
&= 1.
\end{aligned}$$

e) Sirkulasjonen rundt kurven λ kan skrives som

$$C = \int_\lambda \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{OA} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{BC} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{CO} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

$$\begin{aligned}
\int_{OA} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 5\,dx = 5\\
\int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 (2y-8)\,dy = -7\\
\int_{BC} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= -\int_0^1 6\,dx = -6\\
\int_{CO} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 8\,dy = 8.
\end{aligned}$$

Sirkulasjonene blir derfor

$$C = 5 - 7 - 6 + 8 = 0.$$

Vi skal nå beregne sirkulasjon ved hjelp av Stokes' sats:

$$\int_\lambda \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\sigma (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

La oss regne ut virvlingen:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ y^2 + 5 & 2xy - 8 & 0 \end{vmatrix} = (2y - 2y)\boldsymbol{k} = 0.$$

Siden virvlingen er null blir også sirkulasjonen lik null.

Kapittel 8

Polarkoordinater

Oppgave 1

Vi har gitt skalarfeltet $\beta(x, y) = xy$ i kartesiske koordinater.

a) For polarkoordinater (r, θ) og kartesiske koordinater (x, y) har vi sammenhengen $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Innsatt i $\beta = xy$:

$$\beta = r^2 \cos\theta \sin\theta.$$

b) Gradientvektoren i kartesiske koordinater:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}. \tag{8.1}$$

Gradientvektoren i polare koordinater:

$$\begin{aligned}
\nabla\beta &= \frac{\partial\beta}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta \\
&= 2r\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{i}_r + r(-\sin\theta\sin\theta + \cos\theta\cos\theta)\boldsymbol{i}_\theta \\
&= 2r\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{i}_r + r\big(\cos^2\theta - \sin^2\theta\big)\boldsymbol{i}_\theta. \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

For å vise at (8.1) og (8.2) er samme vektor kan vi gjøre om (8.1) til polare koordinater. Vi trenger da sammenhengen mellom enhetsvektorene i kartesiske og polare koordinater:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i} &= \cos\theta\boldsymbol{i}_r - \sin\theta\boldsymbol{i}_\theta \\
\boldsymbol{j} &= \sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos\theta\boldsymbol{i}_\theta.
\end{aligned}$$

Vi setter dette inn i likning 8.1:

$$\begin{aligned}
\nabla\beta &= y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} \\
&= r\sin\theta(\cos\theta\boldsymbol{i}_r - \sin\theta\boldsymbol{i}_\theta) + r\cos\theta(\sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos\theta\boldsymbol{i}_\theta) \\
&= 2r\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{i}_r + r\big(\cos^2\theta - \sin^2\theta\big)\boldsymbol{i}_\theta.
\end{aligned}$$

c) Divergensen til $\nabla\beta$ i kartesiske koordianter:

$$\nabla\cdot\nabla\beta = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

Divergensen til $\nabla\beta$ i polare koordinater:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla\beta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[r(2r\cos\theta\sin\theta)\Big]+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(r\cos^2\theta-r\sin^2\theta\Big)\\ &= \frac{1}{r}4r\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{r}\big(2r\cos\theta(-\sin\theta)-2r\sin\theta\cos\theta\big)\\ &= 4\cos\theta\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\\ &= 0.\end{aligned}$$

d) Virvlingen til $\nabla\beta$ i kartesiske koordinater:

$$\nabla\times\nabla\beta=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ y & x & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=0.$$

Virvlingen til $\nabla\beta$ i polare koordinater:

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\beta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[r\big(r\cos^2\theta-r\sin^2\theta\big)\Big]\boldsymbol{k}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(2r\cos\theta\sin\theta)\boldsymbol{k}\\ &= \frac{1}{r}\big(2r\cos^2\theta-2r\sin^2\theta\big)\boldsymbol{k}-\frac{1}{r}2r\big(-\sin^2\theta+\cos^2\theta\big)\boldsymbol{k}\\ &= \big(2\cos^2\theta-2\sin^2\theta+2\sin^2\theta-2\cos^2\theta\big)\boldsymbol{k}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi har gitt skalarfeltet $\beta(r)=\dfrac{A}{r}$ der $r=\big(x^2+y^2+z^2\big)^{1/2}$ og A er en konstant.

a) Gradientvektoren $\nabla\beta$ i kartesiske koordinater:

$$\nabla\beta=\frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta}{\partial x} &= \frac{\partial\beta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\\ &= -\frac{A}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\\ &= -\frac{A}{r^2}\frac{1}{2}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\\ &= -Ax\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-1}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{1}{2}}\\ &= -Ax\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Uttrykkene for $\dfrac{\partial\beta}{\partial y}$ og $\dfrac{\partial\beta}{\partial z}$ kan regnes ut på tilsvarende måte slik at

$$\begin{aligned}\nabla\beta &= -A\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}).\\ \Big(&= -Ar^{-3}\boldsymbol{r}=-\frac{A}{r^3}r\boldsymbol{i}_r=-\frac{A}{r^2}\boldsymbol{i}_r\Big)\end{aligned}$$

Gradientvektoren $\nabla\beta$ i sfæriske polarkoordinater:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}_\varphi = -\frac{A}{r^2}\boldsymbol{i}_r.$$

b) Divergensen til $\nabla\beta$ i kartesiske koordinater:

$$\nabla\cdot\nabla\beta = \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[-Ax\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\right]\\
&= -A\left[\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}} + x\left(-\frac{3}{2}\right)\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right]\\
&= A\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\left[3x^2\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-1} - 1\right].
\end{aligned}$$

Tilsvarende utregning kan gjøres for $\dfrac{\partial^2\beta}{\partial y^2}$ og $\dfrac{\partial^2\beta}{\partial z^2}$ slik at

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\nabla\beta &= A\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\left[3\big(x^2+y^2+z^2\big)\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-1} - 3\right]\\
&= A\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\big[3-3\big]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Divergensen til $\nabla\beta$ i sfæriske polarkoordinater:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\nabla\beta &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-\frac{A}{r^2}\right)\right] + 0 + 0\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-A)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Oppgave 3

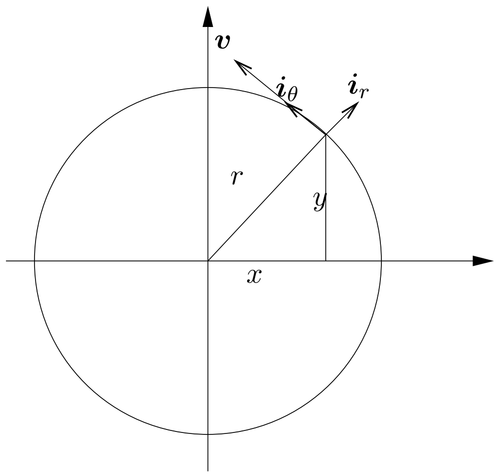
Vi har gitt et hastighetsfelt i kartesiske koordinater:

$$\boldsymbol{v} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}.$$

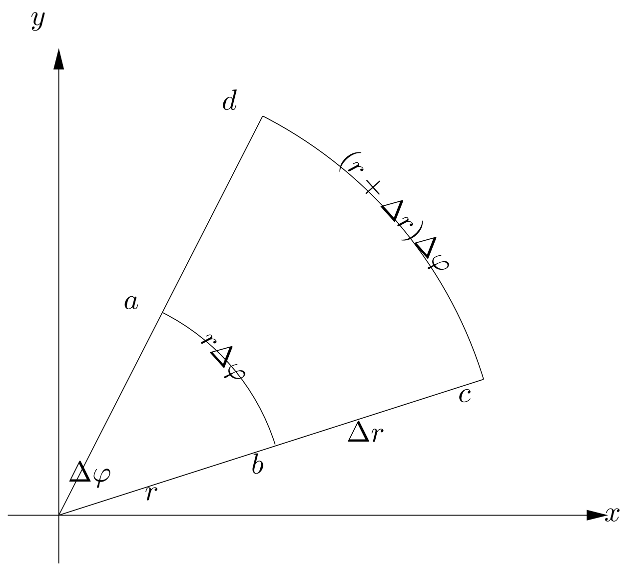
a) For å finne uttrykket for $\boldsymbol{v}$ i polarkoordinater må vi bruke likningene:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\\
y &= r\sin\theta\\
\boldsymbol{i} &= \cos\theta\boldsymbol{i}_r - \sin\theta\boldsymbol{i}_\theta\\
\boldsymbol{j} &= \sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos\theta\boldsymbol{i}_\theta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \omega r\sin\theta(\cos\theta\boldsymbol{i}_r-\sin\theta\boldsymbol{i}_\theta)+\omega r\cos\theta(\sin\theta\boldsymbol{i}_r+\cos\theta\boldsymbol{i}_\theta)\\ &= \omega r(-\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta)\boldsymbol{i}_r+\omega r(\sin\theta\sin\theta+\cos\theta\cos\theta)\boldsymbol{i}_\theta\\ &= \omega r\boldsymbol{i}_\theta.\end{aligned}$$



$$\boldsymbol{v}=\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}=\omega\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&1\\x&y&0\end{vmatrix}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}.$$



b) Sirkulasjonen kan deles opp i fire deler:

$$C=\oint_{abcd}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{ab}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{bc}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{cd}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{da}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

- ab: $\boldsymbol{dr}$ er her et lite bueelement på sirkelen med radius r og har retning $-\boldsymbol{i}_\theta$. Langs ab er $\boldsymbol{v}$ konstant lik ωr i $\boldsymbol{i}_\theta$-retning. $\boldsymbol{dr}$ og $\boldsymbol{v}$ er altså parallelle.

$$\int_{ab} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = -\omega r \cdot r\Delta\varphi \quad \text{(lengden av } \boldsymbol{v} \cdot \text{ lengden av } ab\text{)}.$$

- bc: $\boldsymbol{dr}$ peker nå i retning $\boldsymbol{i}_r$ og $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \omega r \boldsymbol{i}_\theta \cdot dr\boldsymbol{i}_r = 0$.
- cd: Her kan vi benytte oss av et tilsvarende argument som for linjestykket ab, men nå er $\boldsymbol{dr}$ et buelement på en sirkel med radius $r+\Delta r$ og peker i positiv $\boldsymbol{i}_\theta$-retning:

$$\int_{cd} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \omega(r + \Delta r) \cdot (r + \Delta r)\Delta\varphi \quad \text{(lengden av } \boldsymbol{v} \cdot \text{ lengden av } cd\text{)}.$$

- da: $\boldsymbol{dr}$ peker nå i retning $-\boldsymbol{i}_r$ og $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \omega r \boldsymbol{i}_\theta \cdot (-dr\boldsymbol{i}_r) = 0$.

Vi legger sammen leddene og får

$$\begin{aligned} C &= -\omega r^2\Delta\varphi + \omega\big(r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2\big)\Delta\varphi \\ &= \omega\Delta r\Delta\varphi(2r + \Delta r). \end{aligned}$$

c) Stokes' sats:

$$\int_\sigma (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = C.$$

Vi regnet ut C for et flateelement $abcd$ i oppgave b). Hvis vi nå lar $r = 0$ og $\Delta\varphi = 2\pi$ får vi sirkulasjonen C for en sirkelflate med radius Δr:

$$C = \omega\Delta r\Delta\varphi(2r + \Delta r) = 2\pi\omega(\Delta r)^2.$$

Dette er virvlingen for hele sirkelflaten. Deler vi C på arealet får vi virvlingen i et vilkårlig punkt i feltet:

$$C = \frac{2\pi\omega(\Delta r)^2}{\pi(\Delta r)^2} = 2\omega$$

med retning normalt sirkelflaten. For å regne ut virvlingen direkte bruker vi polarkoordinatformen:

$$\boldsymbol{v} = \omega r \boldsymbol{i}_\theta, \quad \nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{k}.$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{v} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega r)\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\omega}{r}2r\boldsymbol{k} \\ &= 2\omega\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Oppgave 4

Et hastighetsfelt er gitt ved

$$\boldsymbol{v} = \frac{C}{2\pi}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}\Big)$$

der C er en konstant.

a) For å finne uttrykket for $\boldsymbol{v}$ i polarkoordinater må vi bruke likningene:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ \boldsymbol{i} &= \cos\theta\boldsymbol{i}_r - \sin\theta\boldsymbol{i}_\theta \\ \boldsymbol{j} &= \sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos\theta\boldsymbol{i}_\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{C}{2\pi}\bigg(-\frac{r\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}(\cos\theta\boldsymbol{i}_r - \sin\theta\boldsymbol{i}_\theta) \\ &\quad + \frac{r\cos\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}(\sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos\theta\boldsymbol{i}_\theta)\bigg) \\ &= \frac{C}{2\pi r}\Big(-\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{i}_r + \sin^2\theta\boldsymbol{i}_\theta + \cos\theta\sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos^2\theta\boldsymbol{i}_\theta\Big) \\ &= \frac{C}{2\pi r}\boldsymbol{i}_\theta. \end{aligned}$$

b) Som i tilfellet i oppgave 3b) har vi også denne gangen at

$$\int_{bc} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{da} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

siden $\boldsymbol{v}$ står normalt på $\boldsymbol{i}_r$ ($\boldsymbol{v}$ er tangent til sirkler med sentrum i origo). Sirkulasjonen, her kalt S, er derfor gitt ved

$$S = \oint_{abcd} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{ab} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{cd} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Fra oppgave a) kan vi slutte at $\boldsymbol{v}$ er konstant langs sirkler med sentrum i origo og de to kurveintegralene kan regnes ut (som i oppgave 3b) ved å gange lengden av vektoren $\boldsymbol{v}$ med lengden av kurven:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{C}{2\pi r}\cdot r\Delta\varphi + \frac{C}{2\pi(r+\Delta r)}\cdot(r+\Delta r)\Delta\varphi \\ &= -\frac{C\Delta\varphi}{2\pi} + \frac{C\Delta\varphi}{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) Virvlingen i polarkoordinater:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{k} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{C}{2\pi r}\right)\boldsymbol{k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

d) Sirkulasjonen av $\boldsymbol{v}$ langs en sirkellinje λ:

$$S = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$$

der $d\boldsymbol{r}$ kan uttrykkes som $d\boldsymbol{r} = ds\boldsymbol{i}_\theta$ med ds som en liten buelengde.

$$\begin{aligned}
S &= \oint_\lambda \frac{C}{2\pi r}\boldsymbol{i}_\theta \cdot ds\boldsymbol{i}_\theta \\
&= \frac{C}{2\pi r}\oint_\lambda ds \\
&= \frac{C}{2\pi r} \cdot 2\pi r \\
&= C.
\end{aligned}$$

Vi har et singulært punkt i origo der $|\boldsymbol{v}| \to \infty$.

Oppgave 5

Et strømfelt i jordatmosfæren er gitt ved $\boldsymbol{v} = f(\theta)\boldsymbol{i}_\varphi$.

a) Divergensen til $\boldsymbol{v}$ (i sfæriske polarkoordinater):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 + 0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f(\theta)}{\partial \varphi} = 0.$$

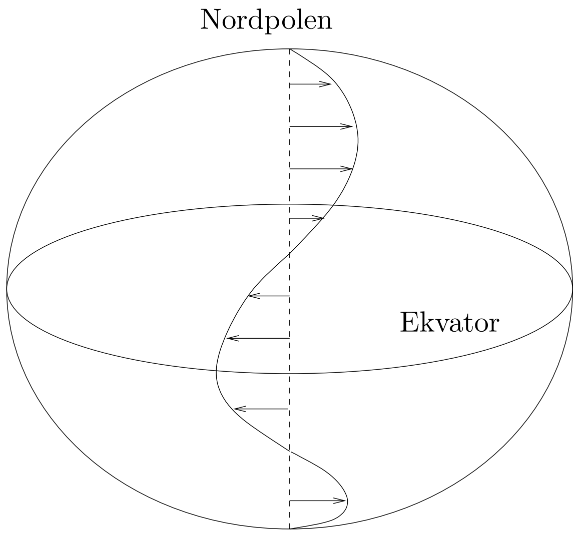
b) Vi setter nå $f(\theta) = C\sin 3\theta$ der C er en positiv konstant. θ tilsvarer breddegradene der $\theta = 0°$ er nordpolen, $\theta = 90°$ er ekvator og $\theta = 180°$ er sydpolen. Hvis vi tegner $\boldsymbol{v}$ inn på en kule får vi vindfeltet i figur 8.1.

c) Sirkulasjonen kan deles opp i fire deler:

$$S = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{ab} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{bc} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{cd} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{da} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

hvor vinkelkoordinatene for punkt a er (θ_0, φ_0), for punkt b er $(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0)$, for punkt c er $(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0 + \Delta\varphi)$, og for punkt d er $(\theta_0, \varphi_0 + \Delta\varphi)$.

De fire delintegralene blir som følger:



Figur 8.1: Passat- og vestenvindsfeltet.

- ab: $d\boldsymbol{r}$ er et lite bueelement på en sirkel med radius r og har retning $\boldsymbol{i}_\theta$, følgelig er $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = f(\theta)\boldsymbol{i}_\varphi \cdot \boldsymbol{i}_\theta r d\theta = 0$.
- bc: $d\boldsymbol{r}$ er et lite bueelement på en sirkel med radius $r\sin(\theta_0+\Delta\theta)$ og har retning $\boldsymbol{i}_\varphi$. Langs bc er $\boldsymbol{v}$ konstant lik $f(\theta_0+\Delta\theta)\boldsymbol{i}_\varphi$. Da er $d\boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{v}$ parallelle.
$$\int_{bc} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = f(\theta_0+\Delta\theta) r \sin(\theta_0+\Delta\theta)\Delta\varphi$$
- cd: $d\boldsymbol{r}$ er et lite bueelement på en sirkel med radius r og har retning $-\boldsymbol{i}_\theta$, følgelig er $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = -f(\theta)\boldsymbol{i}_\varphi \cdot \boldsymbol{i}_\theta r d\theta = 0$.
- da: $d\boldsymbol{r}$ er et lite bueelement på en sirkel med radius $r\sin\theta_0$ og har retning $-\boldsymbol{i}_\varphi$. Langs da er $\boldsymbol{v}$ konstant lik $f(\theta_0)\boldsymbol{i}_\varphi$. Da er $d\boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{v}$ parallelle.
$$\int_{da} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = -f(\theta_0) r\sin\theta_0 \Delta\varphi$$

Vi legger sammen leddene og får
$$\begin{aligned} S &= r\left\{\sin(\theta_0+\Delta\theta) f(\theta_0+\Delta\theta) - \sin\theta_0 f(\theta_0)\right\}\Delta\varphi \\ &\approx r\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta f(\theta)\right\}\Big|_{\theta=\theta_0} \Delta\theta\,\Delta\varphi. \end{aligned}$$

Stokes sats:
$$\int_\sigma (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \oint_\lambda \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = S.$$

Sirkelflaten har areal $r^2\sin\theta_0\,\Delta\theta\,\Delta\varphi$ og har normalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_r$. Innsatt i Stokes sats
$$(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{i}_r r^2\sin\theta_0\,\Delta\theta\,\Delta\varphi = r\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta f(\theta)\right\}\Delta\theta\,\Delta\varphi$$

Vertikalkomponenten av virvlingen blir
$$(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{i}_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta f(\theta)\right\} = \frac{C}{r}\left[3\cos 3\theta + \sin 3\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

Oppgave 6

Newtons gravitasjonslov er gitt ved

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GmM\boldsymbol{r}}{r^3}$$

der $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ og $r = |\boldsymbol{r}|$.

a) Fra likning 4.20 på side 67 i kompendiet finner vi:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{r^3}\nabla \times \boldsymbol{r} + \nabla\Big(-\frac{GmM}{r^3}\Big) \times \boldsymbol{r}.$$

Vi ser på høyresiden ledd for ledd:

$$-\frac{GmM}{r^3}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{GmM}{r^3}\big(0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}\big) = 0.$$

For å regne ut det andre leddet bruker vi først resultatet fra oppgave 8b i kapittel 2 for å regne ut gradientvektoren:

$$\begin{aligned}
\nabla\Big(-\frac{GmM}{r^3}\Big) &= -GmM\nabla\Big(\frac{1}{r^3}\Big) \\
&= -GmM\Big[\frac{\partial}{\partial x}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{j} + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial z}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{k}\Big] \\
&= -GmM\Big[-\frac{3}{2}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{5}{2}}\big(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}\big)\Big]
\end{aligned}$$

Vi krysser nå gradientvektoren med $\boldsymbol{r}$:

$$\begin{aligned}
\nabla\Big(-\frac{GmM}{r^3}\Big) \times \boldsymbol{r} &= 3GmM\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{5}{2}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= 3GmM\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{5}{2}}\Big[(yz-zy)\boldsymbol{i} - (xz-zx)\boldsymbol{j} + (xy-yx)\boldsymbol{k}\Big] \\
&= 0 \\
\Rightarrow \quad \nabla \times \boldsymbol{F} &= 0.
\end{aligned}$$

b) Gravitasjonspotensialet V er definert ved $\boldsymbol{F} = -\nabla V$. I sfæriske koordinater kan vi skrive

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{r^3}r\boldsymbol{i}_r = -\frac{GmM}{r^2}\boldsymbol{i}_r.$$

Gradientvektoren i sfæriske koordinater er gitt i kapittel 8 som

$$\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \text{ledd i } \boldsymbol{i}_\varphi \text{ og } \boldsymbol{i}_\theta\text{-retning} \\
\Rightarrow \quad -\frac{\partial V}{\partial r} &= -\frac{GmM}{r^2} \\
V &= -\frac{GmM}{r} + V_0.
\end{aligned}$$

c) $V(r = R) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \dfrac{GmM}{R}$ og gravitasjonspotensialet kan skrives som

$$V = -GmM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = -GmM\frac{R-r}{Rr}.$$

Arbeidet er definert som kraft ganger vei:

$$\begin{aligned}
W &= \int_\lambda \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= -\int_R^{R+h} \nabla V \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= -\int_R^{R+h} dV \\
&= V(R) - V(R+h) \\
&= 0 + GmM\frac{R-R-h}{R(R+h)} \\
&= -\frac{mgRh}{R+h}.
\end{aligned}$$

Kapittel 9

Divergens- og virvelfrie felter. Potensialstrøm

Oppgave 1

Det eksisterer et hastighetspotensiale ϕ hvis feltet er virvelfritt. For et to-dimensjonalt felt $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ er virvlingen gitt ved

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Uttrykket for ϕ kan finnes fra likningen $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$. Hvis det også skal eksistere en strømfunksjon ψ må feltet være divergensfritt ($\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$).

a) $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$:

- $\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ eksisterer.
- $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad$ ingen ψ.

Hastighetpotensialet kan nå finnes:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = x \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + f_1(y)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y = y \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + f_2(x).$$

Vi ønsker en entydig ϕ slik at vi må velge

$$f_1(y) = \frac{1}{2}y^2 + C \quad \text{og} \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Potensialet blir derfor

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + C.$$

b) $\boldsymbol{v} = x^2y\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j}$:

- $\nabla \times \boldsymbol{v} = (-y^2 - x^2)\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad$ ingen ϕ.
- $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2xy - 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi$ eksisterer.

Vi løser to likninger for å finne strømfunksjonen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y = -xy^2 \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + f_1(y)$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x = -x^2y \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + f_2(x).$$

For å få en entydig løsning må vi velge $f_1(y) = f_2(x) = C$ slik at strømfunksjonen blir

$$\psi(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + C.$$

c) $\boldsymbol{v} = \big(x^2 + y^2\big)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$:

- $\nabla \times \boldsymbol{v} = (2y - 2y)\boldsymbol{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ eksisterer.
- $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2x + 2x = 4x \quad \Rightarrow \quad$ ingen ψ.

Vi finner uttrykket for ϕ:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = x^2 + y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2x + f_1(y)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y = 2xy \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,y) = xy^2 + f_2(x).$$

For å få en entydig ϕ må vi velge

$$f_1(y) = C \quad \text{og} \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

slik at

$$\phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C.$$

Oppgave 2

a) $\phi = xy$. Vi finner først vektorfeltet, $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$, til hastighetspotensialet:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = y, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = x \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} &= y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Er vektorfeltet divergensfritt?

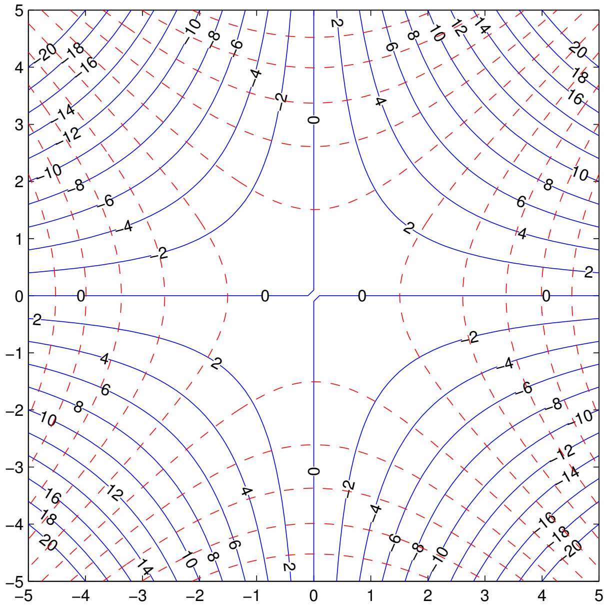
$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Vi kan nå innføre strømfunksjonen ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y = x \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + f_1(y)$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x = -y \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = -\frac{1}{2}y^2 + f_2(x).$$

Vi velger f_1 og f_2 slik at

$$f_1(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$



Figur 9.1: Ekviskalarlinjer for hastighetspotensialet (blå, heltrukken linje) og strømlinjene (rød, stiplet linje).

og strømfunksjonen blir

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2}\big(x^2 - y^2\big) + C.$$

b) $\phi = xy^2 - x^2y$. Vektorfeltet $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ til hastighetspotensialet blir:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = y^2 - 2xy, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2xy - x^2 \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} &= \big(y^2 - 2xy\big)\boldsymbol{i} + \big(2xy - x^2\big)\boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Er vektorfeltet divergensfritt?

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2y + 2x.$$

ϕ er ikke et hastighetspotensiale for en divergensfri strøm. Det eksisterer ingen strømfunksjon.

Strømlinjene kan nå finnes ved å løse differensiallikningen $\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{r} = 0$. Denne differensiallikningen er imidlertid vanskelig å løse.

c) $\phi = x^2 - y^2$. Vi finner først vektorfeltet, $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ til hastighetspotensialet:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2y \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} &= 2x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Er vektorfeltet divergensfritt?

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2 - 2 = 0.$$

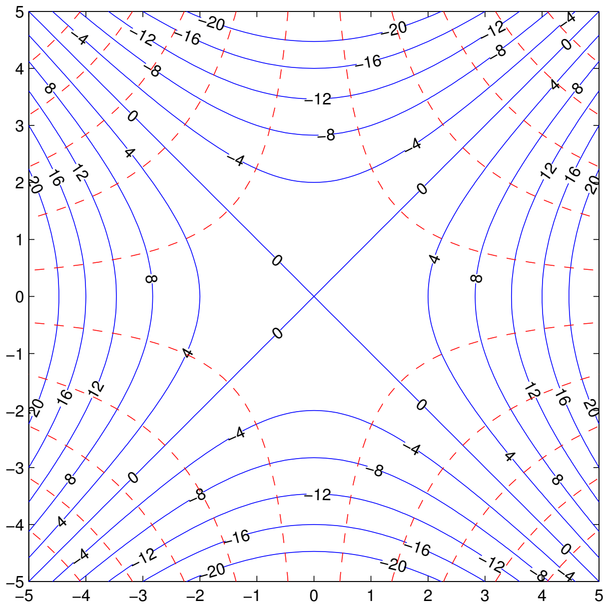
Vi kan nå finne strømfunksjonen ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y = -2y \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = -2xy + f_1(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x = -2x \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = -2xy + f_2(x).$$

Vi må sette $f_1 = f_2 = C$ og strømfunksjonen blir

$$\psi(x,y) = -2xy + C.$$



Figur 9.2: Ekviskalarlinjer for hastighetspotensialet (blå, heltrukken linje) og strømlinjene (rød, stiplet linje).

Oppgave 3

a) Strømlinjene finnes ved å sette strømfunksjonen lik konstant ($\psi = \psi_0$):

$$\begin{aligned} \psi_0\left(x^2 + y^2\right) &= Ay \\ x^2 + y^2 - \frac{Ay}{\psi_0} &= 0. \end{aligned}$$

Vi ønsker å få leddet $y^2 - \dfrac{Ay}{\psi_0}$ over på formen $(y-c)^2$, der c er en konstant.

$$\begin{aligned} y^2 - \frac{Ay}{\psi_0} &= \left(y - \frac{A}{2\psi_0}\right)^2 - \left(\frac{A}{2\psi_0}\right)^2 \\ \Rightarrow \quad x^2 + \left(y - \frac{A}{2\psi_0}\right)^2 &= \left(\frac{A}{2\psi_0}\right)^2. \end{aligned}$$

b) En kilde/sluk plassert i origo har potensial $\phi = C \ln r$ der C er styrken til kilden/sluket og fortegnet bestemmer om det er en kilde eller et sluk. I kartesiske koordinater har vi

$$\phi = C \ln \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}.$$

For et sluk i punktet $(a, 0)$ med styrke $A/2a$ blir potensialet

$$\phi_1 = -\frac{A}{2a} \ln \left[(x-a)^2 + y^2\right]^{1/2}$$

og potensialet til en kilde i $(-a, 0)$ med samme styrke blir

$$\phi_2 = \frac{A}{2a} \ln \left[(x+a)^2 + y^2\right]^{1/2}.$$

Dipolfeltet fåes ved å addere feltene over:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{A}{2a} \ln \left[(x-a)^2 + y^2\right]^{1/2} + \frac{A}{2a} \ln \left[(x+a)^2 + y^2\right]^{1/2}.$$

c) Regel: $\ln x^a = a \ln x$:

$$\phi = -\frac{A}{4a} \ln \left[(x-a)^2 + y^2\right] + \frac{A}{4a} \ln \left[(x+a)^2 + y^2\right].$$

Regel: $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$:

$$\phi = \frac{A}{4a} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} &= \frac{x^2 + 2ax + a^2 + y^2}{x^2 - 2ax + a^2 + y^2} \\
&= \frac{x^2 + y^2 + 2ax + a^2}{x^2 + y^2 - 2ax + a^2} \\
&= \frac{1 + \frac{2ax}{x^2+y^2} + \frac{a^2}{x^2+y^2}}{1 - \frac{2ax}{x^2+y^2} + \frac{a^2}{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Siden $x^2 + y^2 \gg a^2$ kan vi gjøre tilnærmingen $\dfrac{a^2}{x^2 + y^2} \approx 0$ og brøken blir

$$\approx \quad \frac{1 + \frac{2ax}{x^2+y^2}}{1 - \frac{2ax}{x^2+y^2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{2}\epsilon}.$$

e) Vi innfører funksjonen

$$f(\epsilon) = \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{2}\epsilon}$$

og lager en rekkeutvikling til første orden av f om punktet ϵ_0:

$$\begin{aligned}
T_f^1 &= f(\epsilon_0) + f'(\epsilon_0)(\epsilon - \epsilon_0) \\
f'(\epsilon) &= \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\epsilon) + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\epsilon)}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon)^2} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon)^2} \\
\Rightarrow \quad T_f^1 &= \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon_0}{1 - \frac{1}{2}\epsilon_0} + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon_0)^2}.
\end{aligned}$$

Siden ϵ er en liten størrelse:

$$\epsilon = \frac{4ax}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \gg a^2$$

så vil T_f^1 være en god tilnærming til $f(\epsilon)$ i omegn av $\epsilon = 0$. Vi velger derfor $\epsilon_0 = 0$. Dette gir $T_f^1 = 1+\epsilon$ og

$$\frac{1+\frac{1}{2}\epsilon}{1-\frac{1}{2}\epsilon} \approx 1+\epsilon.$$

f) Vi innfører funksjonen $f(\epsilon) = \ln(1+\epsilon)$. Taylorutviklingen til første orden av f om punktet ϵ_0 blir

$$\begin{aligned} T_f^1 &= f(\epsilon_0) + f'(\epsilon_0)(\epsilon-\epsilon_0) \\ &= \ln(1+\epsilon_0) + \frac{\epsilon-\epsilon_0}{1+\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Vi velger $\epsilon_0 = 0$ med samme begrunnelse som i oppgave e) og får $T_f^1 = \epsilon$ som gir

$$\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon.$$

Vi kan nå finne det ønskede uttrykket for hastighetspotensialet:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{A}{4a}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \\ \text{oppg.d)} \quad &= \frac{A}{4a}\ln\frac{1+\frac{1}{2}\epsilon}{1-\frac{1}{2}\epsilon} \\ \text{oppg.e)} \quad &= \frac{A}{4a}\ln(1+\epsilon) \\ \text{oppg.f)} \quad &= \frac{A}{4a}\epsilon \\ &= \frac{Ax}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 4

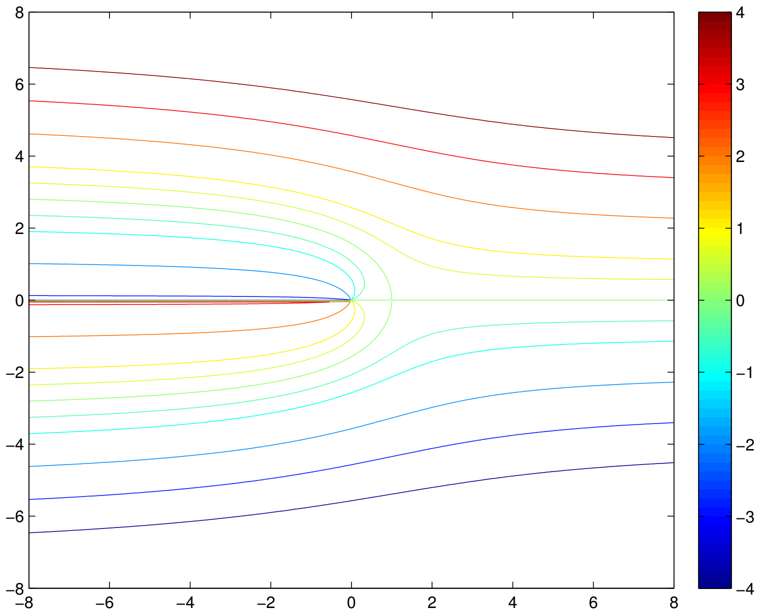
Vi har gitt to potensialfelt $\psi_1 = Uy$ (translasjonsfelt/rettlinjet strøm) og $\psi_2 = -A\theta$ (kilde). For at vi skal kunne superponere feltene må både ψ_1 og ψ_2 være beskrevet i samme koordinatsystem. Vi skriver ψ_1 i polarkoordinater: $\psi_1 = Ur\sin\theta$. Det sammensatte feltet kan skrives som

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Ur\sin\theta - A\theta.$$

Strømlinjene finnes ved å sette strømfunksjonen konstant (ψ_0):

$$\begin{aligned} \psi_0 &= Ur\sin\theta - A\theta \\ \Rightarrow \quad r &= \frac{\psi_0}{U\sin\theta} + \frac{A\theta}{U\sin\theta}. \end{aligned}$$

Se figur 9.3: Legg spesielt merke til at det er et stagnasjonspunkt like til høyre for origo, og at en strømlinje som går igjennom stagnasjonspunktet krummer seg som en “skål” mot venstre.



Figur 9.3: Strømlinjene $\psi_0 = -4, -3, -2, -1, -.5, 0, .5, 1, 2, 3, 4$. Konstantene er satt til å være $U = A = 1$.

Oppgave 5

En kilde i origo er gitt i polarkoordinater som

$$\begin{aligned}\phi &= A \ln r \\ \psi &= -A\theta.\end{aligned}$$

Fra $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ får vi

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \mathrm{atan2}(y, x),$$

se kommentar på side 94 for en beskrivelse av funksjonen atan2.

Dette gir hastighetspotensialet og strømfunksjonen i kartesiske koordinater:

$$\begin{aligned}\phi &= A \ln \sqrt{x^2+y^2} \\ \psi &= -A\,\mathrm{atan2}(y, x).\end{aligned}$$

Strømvektoren $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ kan finnes fra likningene

$$(1) \qquad v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (3)$$

$$(2) \qquad v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad (4).$$

Her er det valgfritt om vi bruker (1) eller (2), og (3) eller (4). (1) gir

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= \frac{A}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{A}{x+\frac{y^2 x}{x^2}} \\ &= \frac{Ax}{x^2+y^2} \\ &= \frac{Ax}{r^2}. \end{aligned}$$

(3) gir

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= -\frac{A}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= \frac{Ay}{x^2+y^2} \\ &= \frac{Ay}{r^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 6

Fra oppgave 5 har vi ϕ og ψ for en kilde med styrke A i origo i kartesiske koordinater. For å finne uttrykket for en kilde utenfor origo trenger vi bare å justere koordinatene.

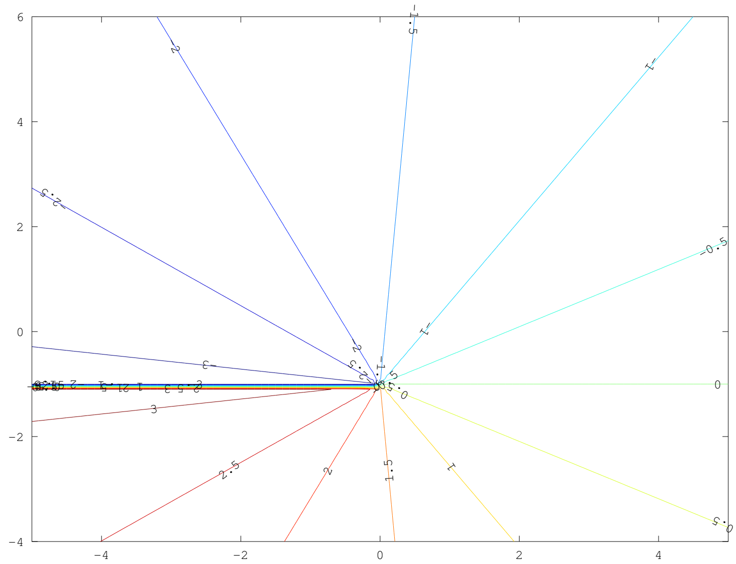
- En kilde i punktet $(0, a)$:

$$\begin{aligned} \phi &= A \ln \left(x^2 + (y-a)^2\right)^{1/2} \\ \psi &= -A \operatorname{atan2}(y-a, x). \end{aligned}$$

- En kilde i punktet $(0, -a)$:

$$\begin{aligned} \phi &= A \ln \left(x^2 + (y+a)^2\right)^{1/2} \\ \psi &= -A \operatorname{atan2}(y+a, x). \end{aligned}$$

Se figur 9.4, og legg spesielt merke til at det er problematisk å tegne konturplott for ψ med Matlab sin `contour`-funksjon fordi atan2-funksjonen har et diskontinuerlig hopp mellom $-\pi$ og π rett til venstre for det singulære punktet. Se kommentar på side 94 for en beskrivelse av funksjonen atan2.



Figur 9.4: Strømlinjene til kilden i punktet $(0, -a)$ med $A = a = 1$.

Oppgave 7

En punktvirvel i origo er i polarkoordinater gitt ved

$$\begin{aligned} \phi &= A\theta \\ \psi &= A \ln r. \end{aligned}$$

For å skrive ϕ og ψ i kartesiske koordinater kan vi bruke likningene

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \mathrm{atan2}(y, x),$$

se kommentar på side 94 for en beskrivelse av funksjonen atan2.

Hastighetspotensialet og strømfunksjonen blir dermed

$$\begin{aligned} \phi &= A \,\mathrm{atan2}(y, x) \\ \psi &= A \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Komponentene til strømvektoren kan vi finne på samme måte som i oppgave 5:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{Ay}{r^2} \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{Ax}{r^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 8

Vi har gitt strømfunksjonen til to potensialfelt:

$$\psi_1 = -Uy, \quad \psi_2 = \frac{Ay}{x^2 + y^2}.$$

Det superponerte feltet har strømfunksjon

$$\psi = -Uy + \frac{Ay}{x^2+y^2}.$$

a) Vi innfører polarkoordinater ved $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$:

$$\begin{aligned}\psi &= -Ur\sin\theta + \frac{a^2 Ur\sin\theta}{r^2} \\ &= -U\left[1-\frac{a^2}{r^2}\right] r\sin\theta.\end{aligned}$$

b) Strømkomponentene kan finnes fra likningene

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

$$\begin{aligned}v_r &= -\frac{1}{r}(-U)\left[1-\frac{a^2}{r^2}\right] r\cos\theta \\ &= U\left[1-\frac{a^2}{r^2}\right]\cos\theta \\ v_\theta &= -U\sin\theta - \frac{Ua^2}{r^2}\sin\theta \\ &= -U\left[1+\frac{a^2}{r^2}\right]\sin\theta.\end{aligned}$$

På sirkellinjen $r = a$ blir strømkomponentene $v_r(r{=}a) = 0$ og $v_\theta(r{=}a) = -2U\sin\theta$.

Oppgave 9

Den elektriske feltstyrken utenfor en elektrisk ladet partikkel er gitt ved

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{r^2}\boldsymbol{i}_r.$$

Potensialet, V, er gitt ved $\boldsymbol{E} = -\nabla V$. I denne oppgaven må vi bruke kulekoordinater, og vi har at

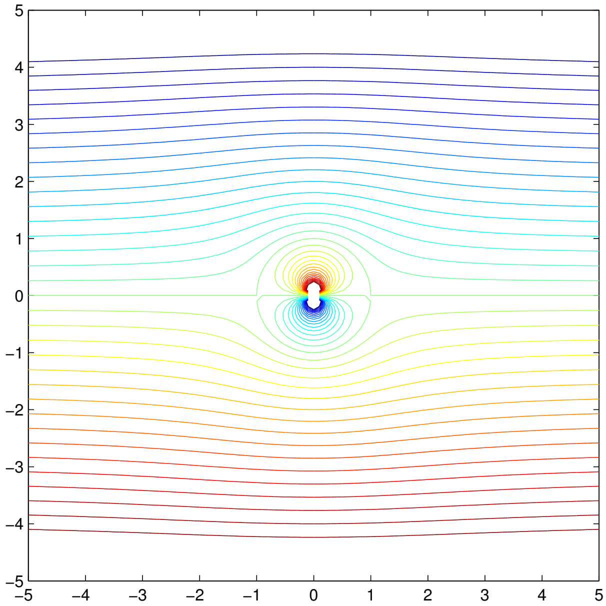
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}_\varphi.$$

$$\begin{aligned}\frac{Q}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad &\Rightarrow \quad V = \frac{Q}{r} + f_1(\theta,\varphi) \\ 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} \quad &\Rightarrow \quad V = f_2(r,\varphi) \\ 0 = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi} \quad &\Rightarrow \quad V = f_3(r,\theta)\end{aligned}$$

Potensialet blir derfor

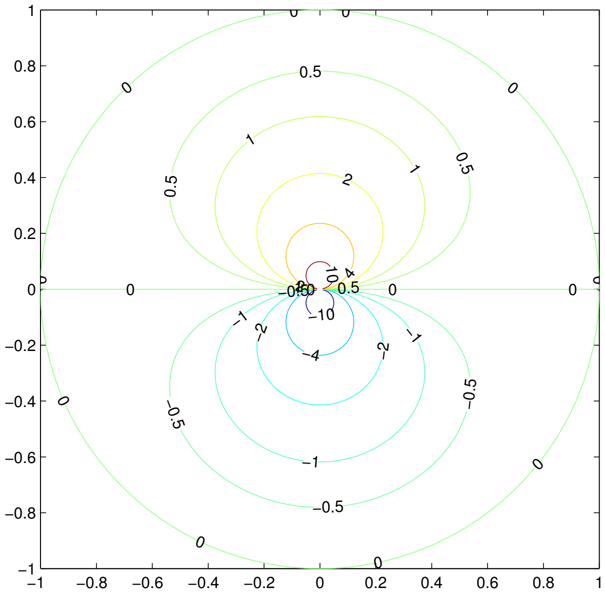
$$V = V(r) = \frac{Q}{r} + C$$

hvor C er en vilkårlig konstant.



Figur 9.5: Strøm rundt en sylinder ($r > a$)

.



Figur 9.6: Feltet for $r < a$ blir et dipolfelt.

Kommentar om funksjonen atan2(y, x)

Et punkt i xy-planet har posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$. Vinkelen mellom posisjonsvektor og positiv x-akse er gitt ved $\operatorname{atan2}(y, x)$. Dersom puktet ligger i første eller fjerde kvadrant har vi $\operatorname{atan2}(y, x) = \arctan(y/x)$. Dersom punktet ligger i andre kvadrant har vi $\operatorname{atan2}(y, x) = \arctan(y/x) + \pi$. Dersom punktet ligger i tredje kvadrant har vi $\operatorname{atan2}(y, x) = \arctan(y/x) - \pi$.

Kapittel 10

Feltlikninger for fluider

Oppgave 1

Gitt et to-dimensjonalt strømfelt

$$\boldsymbol{v} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}.$$

a) Den konvektive akselerasjonen for et to-dimensjonalt felt er gitt ved

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} &= v_x\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\\ &= -\omega y\omega\boldsymbol{j} + \omega x(-\omega\boldsymbol{i})\\ &= -\omega^2\big(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\big).\end{aligned}$$

b) Bevegelseslikninga (Euler-likninga):

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}.$$

Feltet er uavhengig av tiden og trykkraften er den eneste kraften som virker slik at $\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$ og $\boldsymbol{g} = 0$. Bevegelseslikninga forenkler seg til

$$-\omega^2\big(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\big) = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

og trykkgradienten blir

$$\nabla p = \rho\omega^2\big(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\big).$$

Trykket finner vi ved å skrive ut trykkgradientens komponenter

$$\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} = \rho\omega^2\big(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\big).$$

Dette er ei vektorlikning med to likninger for å bestemme p:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho\omega^2 x \qquad\Rightarrow\qquad p(x,y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2x^2 + f_1(y)\\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho\omega^2 y \qquad\Rightarrow\qquad p(x,y) = \frac{1}{2}\rho\omega y^2 + f_2(x).\end{aligned}$$

For å få en entydig p må vi velge

$$f_1(y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 + C, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + C$$

slik at det generelle utrykket for trykket blir

$$p(x,y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(x^2 + y^2\right) + C.$$

Trykket i origo skal være lik p_0: $p(0,0) = C = p_0$ slik at

$$p(x,y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(x^2 + y^2\right) + p_0.$$

Oppgave 2

Prisen per kilo for et parti laks er gitt ved formelen

$$P = 40 + 5 \cdot 10^{-2} x - 10t.$$

a) Endringen i verdien per tid av laksen er gitt ved den partikkelderiverte til P:

$$\frac{DP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla P.$$

Hastighetsfeltet kan skrives som $\boldsymbol{v} = 600\boldsymbol{i}$ der $\boldsymbol{i}$ er en enhetsvektor i retning sørover fra Trondheim. Vi får da

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -10 \\ \boldsymbol{v} \cdot \nabla P &= 600\frac{\partial P}{\partial x} = 600 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 30 \end{aligned}$$

og endringen i prisen per døgn per kilo blir

$$\frac{DP}{dt} = -10 + 30 = 20.$$

b) Prisendringen på grunn av alder er gitt ved den lokalderiverte av P med hensyn på tid: $\frac{\partial P}{\partial t} = -10$. Prisendringen på grunn av forskjell i markedspris er gitt ved den konvektivt deriverte: $\boldsymbol{v} \cdot \nabla P = 30$.

c) For at laksen ikke skal avta i verdi må $\frac{DP}{dt} \geq 0$, dvs.

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla P \geq -\frac{\partial P}{\partial t} = 10.$$

La v_x være (gjennomsnitts)hastigheten til traileren. Vektorfeltet kan da skrives som $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i}$ og

$$\begin{aligned} v_x \cdot 5 \cdot 10^{-2} &\geq 10 \\ v_x &\geq 10 \cdot 5^{-1} \cdot 10^2 \\ v_x &\geq 200. \end{aligned}$$

Traileren må altså kjøre i minst 200 km per døgn for at verdien av laksen ikke skal avta.

Oppgave 3

Et punktvirvelfelt er gitt ved

$$v_x = -\frac{Ay}{r^2}, \quad v_y = \frac{Ax}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

a) Den konvektive akselerasjonen er gitt ved

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \\
&= v_x \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} \\
&= -\frac{Ay}{r^2}\left[\frac{Ay \cdot 2x}{r^4}\boldsymbol{i} + \frac{A(x^2+y^2) - Ax \cdot 2x}{r^4}\boldsymbol{j}\right] \\
&\quad + \frac{Ax}{r^2}\left[\frac{-A(x^2+y^2) + Ay \cdot 2y}{r^4}\boldsymbol{i} - \frac{Ax \cdot 2y}{r^4}\boldsymbol{j}\right] \\
&= -\frac{A^2}{r^3}\left[\frac{2xy^2 + x^3 - xy^2}{r^3}\boldsymbol{i} + \frac{y^3 - yx^2 + 2x^2y}{r^3}\boldsymbol{j}\right] \\
&= -\frac{A^2}{r^3}\left[\frac{x(x^2+y^2)}{r^3}\boldsymbol{i} + \frac{y(x^2+y^2)}{r^3}\boldsymbol{j}\right] \\
&= -\frac{A^2}{r^3}\left[\frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j}\right] \\
&= -\frac{A^2}{r^3}\frac{\boldsymbol{r}}{r}.
\end{aligned}$$

b) Sentripetalakselerasjonen må ha retning normalt på en sirkelbue inn mot origo. Retningen til $\boldsymbol{a}$ er $-\boldsymbol{r}$ som peker inn mot origo.

c) Trykkgradienten kan finnes fra Euler-likninga:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}.$$

Feltet er stasjonært (uavhengig av tiden) og det er ingen ytre krefter som virker inn. Euler-likninga forenkler seg da til

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p \\
-\frac{A^2}{r^3}\frac{\boldsymbol{r}}{r} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p \\
\nabla p &= \rho\frac{A^2}{r^3}\frac{\boldsymbol{r}}{r}.
\end{aligned}$$

Vektoren $\boldsymbol{r}$ kan vi uttrykke i polakoordinater som $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r$. Gradientvektoren i polarkoordinater er

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\boldsymbol{i}_\theta.$$

Vi får følgende likninger for løsning av p:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\frac{A^2}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad p(r,\theta) = \rho A^2\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\right) + f(\theta)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p = p(r) \qquad \Rightarrow \qquad f(\theta) = C.$$

Med betingelsen om at trykket uendelig langt fra origo er p_0 får vi $p(r \to \infty) = p_0 \Rightarrow C = p_0$ og trykket blir

$$p(r) = p_0 - \frac{\rho A^2}{2r^2}.$$

Oppgave 4

Gitt hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{x}{1+t}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{1+t}\boldsymbol{j} - \frac{3z}{1+t}\boldsymbol{k}. \tag{10.1}$$

Den lokale akselerasjonen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} &= -\frac{x}{(1+t)^2}\boldsymbol{i} - \frac{2y}{(1+t)^2}\boldsymbol{j} + \frac{3z}{(1+t)^2}\boldsymbol{k} \\
&= -\frac{1}{(1+t)^2}\big[x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}\big].
\end{aligned}$$

Den konvektive akselerasjonen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} &= v_x\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \\
&= \frac{x}{1+t}\frac{\boldsymbol{i}}{1+t} + \frac{2y}{1+t}\frac{2\boldsymbol{j}}{1+t} - \frac{3z}{1+t}\left(-\frac{3\boldsymbol{k}}{1+t}\right) \\
&= \frac{1}{(1+t)^2}\big[x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 9z\boldsymbol{k}\big].
\end{aligned}$$

Oppgave 5

Gitt et hastighetsfelt:

$$\boldsymbol{v} = ax\boldsymbol{i} + 2ay\boldsymbol{j} - 3az\boldsymbol{k}, \quad a > 0.$$

a) Strømmen til en inkompressibel væske må være divergensfri:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = a + 2a - 3a = 0.$$

b) Feltet er stasjonært slik at akselerasjonen er gitt ved den konvektive akselerasjonen. Det nye feltet er identisk med feltet i likning 10.1 hvis vi setter $a = \dfrac{1}{1+t}$. Vi har da regnet ut den konvektive akselerasjonen før:

$$\boldsymbol{a} = a^2\big[x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 9a\boldsymbol{k}\big].$$

c) Euler-likninga for et stasjonært felt som ikke er påvirket av ytre krefter:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \\
\nabla p &= -\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \\
&= -\rho a^2 \big[x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 9a\boldsymbol{k} \big].
\end{aligned}
$$

Størrelsen til trykkgradienten:

$$
|\nabla p| = \rho a^2 \sqrt{x^2 + 16y^2 + 81z^2}.
$$

Retningen:

$$
-\big[x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 9z\boldsymbol{k} \big].
$$

Oppgave 6

Vi har gitt et to-dimensjonalt hastighetsfelt

$$
\boldsymbol{v} = \frac{Q}{r^2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})
$$

der Q er en konstant.

a) Vi har en strøm for en inkompressibel væske dersom divergensen er null:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= Q \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + Q \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\
&= Q \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} + Q \frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= Q \frac{x^2 + y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 - 2y^2}{r^4} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Strømlinjene finner vi fra likninga $\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r} = 0$, som blir $v_x \, dy = v_y \, dx$:

$$
\frac{Q}{r^2} x \, dy = \frac{Q}{r^2} y \, dx.
$$

Denne differensiallikninga er separabel, før vi integrerer forkorter vi så mye som mulig og sørger for at alle x'ene er på samme side som dx og alle y'ene er på samme side som dy:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y} dy &= \frac{1}{x} dx \\
\ln |y| &= \ln |x| + C \\
|y| &= e^{\ln |x| + C} \\
&= e^C e^{\ln |x|} \\
y &= Ax
\end{aligned}
$$

Strømlinjene er altså rette linjer som går gjennom origo. Retningen avhenger av fortegnet til konstanten Q.

b) Massestrømmen er gitt ved integralet

$$M = \int_\sigma \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

der $\boldsymbol{n}$ er normalvektoren til flaten σ. På en sylinderflate er $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_r$. La oss uttrykke vektorfeltet i polarkoordinater:

$$\boldsymbol{v} = \frac{Q}{r^2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \frac{Q}{r^2} r\boldsymbol{i}_r = \frac{Q}{r}\boldsymbol{i}_r.$$

Massestrømmen blir dermed

$$\begin{aligned} M &= \int_\sigma \rho \frac{Q}{r}\boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{i}_r\, d\sigma \\ &= \rho\frac{Q}{r}\int_\sigma d\sigma \\ &= \rho\frac{Q}{r}\cdot A \end{aligned}$$

der A er arealet til sylinderflaten: $A = 2\pi r h$ (h er høyden til sylinderen).

$$\begin{aligned} M &= \rho\frac{Q}{r}2\pi r h \\ &= 2\pi\rho Q h. \end{aligned}$$

c) Akselerasjonen for en væskepartikkel i feltet er gitt ved den konvektive akselerasjonen siden feltet er stasjonært.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= v_x\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} \\ &= \frac{Q}{r^2}x\left[\frac{Q(x^2+y^2) - Qx\cdot 2x}{r^4}\boldsymbol{i} + \frac{-Qy\cdot 2x}{r^4}\boldsymbol{j}\right] \\ &\quad + \frac{Q}{r^2}y\left[\frac{-Qx\cdot 2y}{r^4}\boldsymbol{i} + \frac{Q(x^2+y^2) - Qy\cdot 2y}{r^4}\boldsymbol{j}\right] \\ &= \frac{Q^2}{r^4}\left[\frac{x(x^2+y^2-2x^2-2y^2)}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{y(x^2+y^2-2y^2-2x^2)}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}\right] \\ &= \frac{Q}{r^4}\left[-x\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} - y\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}\right] \\ &= -\frac{Q^2}{r^4}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}). \end{aligned}$$

Oppgave 7

For en inkompressibel væske i en stasjonær strøm har vi

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0.$$

Massestrømmen i A:

$$
\begin{aligned}
M_A &= \int_\sigma \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma, \quad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = U \\
&= \rho U \int_\sigma d\sigma \\
&= \rho U A.
\end{aligned}
$$

Massestrømmen i a:

$$
M_a = \int_\sigma \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \rho U_a\, a
$$

der U_a er strømhastigheten i a som vi ønsker å finne. Siden vi har en inkompressibel væske må det strømme like mye gjennom A som a:

$$
\begin{aligned}
M_A &= M_a \\
\rho U A &= \rho U_a\, a \\
\Rightarrow \quad U_a &= \frac{UA}{a}.
\end{aligned}
$$

Vi ønsker nå å finne trykket i a. Hvis vi følger en strømlinje fra A til a vil $\mathcal{H}$ fra Bernoullis likning være konstant og vi får

$$
\begin{aligned}
\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 + gz &= \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{UA}{a}\right)^2 + gz \\
p_a &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho U^2 \frac{A^2}{a^2} \\
&= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - \frac{A^2}{a^2}\right].
\end{aligned}
$$

Oppgave 8

a) Massestrømmen i a:

$$
\int_\sigma \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \rho U \int_\sigma d\sigma = \rho U a.
$$

Massestrømmen i b (et av rørene):

$$
\int_\sigma \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \rho U_b \int_\sigma d\sigma = \rho U_b\, b.
$$

Vi har en inkompressibel væske så massestrømmen må være konstant:

$$
\begin{aligned}
\rho U a &= 2\rho U_b\, b \\
U_b &= \frac{Ua}{2b}
\end{aligned}
$$

b) Vi følger en strømlinje fra a til b (et av rørene):

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 + gz &= \frac{p_b}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{Ua}{2b}\right)^2 + gz \\
p_b &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\frac{U^2a^2}{4b^2} \\
&= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2\left[1 - \frac{a^2}{4b^2}\right].
\end{aligned}$$

Oppgave 9

a) Hvis vi bruker Bernoullis likning på en strømlinje fra overflaten av vannet (O) til tappestedet (P) får vi:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0^2 = \frac{p_P}{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_P^2 - gh$$

der vi har lagt nullpunktet for høyden langs vannets overflate. Vi antar nå at trykket ved P er tilnærmet lik lufttrykket ved vannets overflate (p_0) og at strømhastigheten ved overflaten ($\boldsymbol{v}_0$) er mye mindre enn strømhastigheten i røret ($\boldsymbol{v}_P$) slik at $\boldsymbol{v}_0 \ll \boldsymbol{v}_P \Rightarrow \boldsymbol{v}_0 \approx 0$. Bernoullis likning forenkler seg dermed til

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}v_P^2 - gh \\
v_P &= \sqrt{2gh}.
\end{aligned}$$

b) Vi følger nå en strømlinje gjennom røret fra det høyeste punktet (A) til tappestedet (P). $\mathcal{H}$ er konstant og vi får

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 - g(h-H) = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_P^2 - gh.$$

Siden massestrømmen er konstant må $v_A = v_P$ (vann er inkompressibelt og tverrsnittet i røret antas konstant) og likninga over forenkler seg til

$$\begin{aligned}
p_A &= p_0 - \rho gh + \rho g(h-H) \\
&= p_0 - \rho gH.
\end{aligned}$$

c) Vi har at lufttrykket er gitt som $p_0 = 1.01325 \cdot 10^5\text{Pa}$. Vi ønsker at trykket i A (p_A) ikke skal bli lavere enn vannets damptrykk på $2.335 \cdot 10^3\text{Pa}$. Vi må altså løse ulikheten $p_A \geq 2.335 \cdot 10^3\text{Pa}$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad p_0 - \rho gH &\geq 2.335 \cdot 10^3\text{Pa} \\
H &\leq \frac{1}{\rho g}\left(p_0 - 2.335 \cdot 10^3\text{Pa}\right) \\
H &\leq \frac{1}{\rho g}\left(1.01325 \cdot 10^5\text{Pa} - 2.335 \cdot 10^3\text{Pa}\right) \\
H &\leq 9.899 \cdot 10^4\text{Pa}\,\frac{1}{\rho g}.
\end{aligned}$$

Oppgave 10

Fra oppgave 9.8 har vi strømkomponentene til en strøm omkring en sylinder i polarkoordinater

$$
\begin{aligned}
v_r &= U\left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right]\cos\theta \\
v_\theta &= -U\left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right]\sin\theta
\end{aligned}
$$

der $\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{i}_r + v_\theta\boldsymbol{i}_\theta$ og a er radius til sylinderen. La oss kalle et punkt på sylinderflaten for A og et punkt langt oppstrøms fra sylinderen for B. Følger vi en strømlinje fra A til B vil $\mathcal{H}$ fra Bernoullis likning være konstant og vi får

$$
\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_A^2 + gz = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_B^2 + gz. \qquad (10.2)
$$

I punktet A:

$$
\begin{aligned}
v_r(r\!=\!a) &= 0 \\
v_\theta(r\!=\!a) &= -2U\sin\theta.
\end{aligned}
$$

I punktet B:

$$
\begin{aligned}
r \gg a \quad &\Rightarrow \quad v_r = U\cos\theta, \quad v_\theta = -U\sin\theta \\
\theta = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_r = U, \quad v_\theta = 0 \\
p_B = p_0 &
\end{aligned}
$$

Innsatt i likning 10.2 gir dette

$$
\begin{aligned}
\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}(-2U\sin\theta)^2 &= \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 \\
p_A &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - 2\rho U^2\sin^2\theta \\
&= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2\Big[1 - 4\sin^2\theta\Big].
\end{aligned}
$$