Kapittel 10

Feltlikninger for fluider

Oppgave 1

Gitt et to-dimensjonalt strømfelt

$$\boldsymbol{v} = -\omega y \boldsymbol{i} + \omega x \boldsymbol{j}.$$

a) Den konvektive akselerasjonen for et to-dimensjonalt felt er gitt ved

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} &= v_x \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} \\ &= -\omega y \omega \boldsymbol{j} + \omega x(-\omega \boldsymbol{i}) \\ &= -\omega^2 \big(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\big).\end{aligned}$$

b) Bevegelseslikninga (Euler-likninga):

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{g}.$$

Feltet er uavhengig av tiden og trykkraften er den eneste kraften som virker slik at $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$ og $\boldsymbol{g} = 0$. Bevegelseslikninga forenkler seg til

$$-\omega^2 \big(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\big) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

og trykkgradienten blir

$$\nabla p = \rho \omega^2 \big(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\big).$$

Trykket finner vi ved å skrive ut trykkgradientens komponenter

$$\frac{\partial p}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \boldsymbol{j} = \rho \omega^2 \big(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\big).$$

Dette er ei vektorlikning med to likninger for å bestemme p:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \omega^2 x \qquad \Rightarrow \qquad p(x,y) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2 + f_1(y) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \omega^2 y \qquad \Rightarrow \qquad p(x,y) = \frac{1}{2} \rho \omega y^2 + f_2(x).\end{aligned}$$

For å få en entydig p må vi velge

$$f_1(y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 + C, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + C$$

slik at det generelle utrykket for trykket blir

$$p(x, y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(x^2 + y^2\right) + C.$$

Trykket i origo skal være lik p_0: $p(0,0) = C = p_0$ slik at

$$p(x, y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(x^2 + y^2\right) + p_0.$$

Oppgave 2

Prisen per kilo for et parti laks er gitt ved formelen

$$P = 40 + 5 \cdot 10^{-2}x - 10t.$$

a) Endringen i verdien per tid av laksen er gitt ved den partikkelderiverte til P:

$$\frac{DP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla P.$$

Hastighetsfeltet kan skrives som $\boldsymbol{v} = 600\boldsymbol{i}$ der $\boldsymbol{i}$ er en enhetsvektor i retning sørover fra Trondheim. Vi får da

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -10 \\ \boldsymbol{v} \cdot \nabla P &= 600\frac{\partial P}{\partial x} = 600 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 30 \end{aligned}$$

og endringen i prisen per døgn per kilo blir

$$\frac{DP}{dt} = -10 + 30 = 20.$$

b) Prisendringen på grunn av alder er gitt ved den lokalderiverte av P med hensyn på tid: $\frac{\partial P}{\partial t} = -10$. Prisendringen på grunn av forskjell i markedspris er gitt ved den konvektivt deriverte: $\boldsymbol{v} \cdot \nabla P = 30$.

c) For at laksen ikke skal avta i verdi må $\frac{DP}{dt} \geq 0$, dvs.

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla P \geq -\frac{\partial P}{\partial t} = 10.$$

La v_x være (gjennomsnitts)hastigheten til traileren. Vektorfeltet kan da skrives som $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i}$ og

$$\begin{aligned} v_x \cdot 5 \cdot 10^{-2} &\geq 10 \\ v_x &\geq 10 \cdot 5^{-1} \cdot 10^2 \\ v_x &\geq 200. \end{aligned}$$

Traileren må altså kjøre i minst 200 km per døgn for at verdien av laksen ikke skal avta.

Oppgave 3

Et punktvirvelfelt er gitt ved

$$v_x = -\frac{Ay}{r^2}, \quad v_y = \frac{Ax}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

a) Den konvektive akselerasjonen er gitt ved

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \\
&= v_x \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} \\
&= -\frac{Ay}{r^2}\left[\frac{Ay \cdot 2x}{r^4}\boldsymbol{i} + \frac{A(x^2+y^2) - Ax \cdot 2x}{r^4}\boldsymbol{j}\right] \\
&\quad + \frac{Ax}{r^2}\left[\frac{-A(x^2+y^2) + Ay \cdot 2y}{r^4}\boldsymbol{i} - \frac{Ax \cdot 2y}{r^4}\boldsymbol{j}\right] \\
&= -\frac{A^2}{r^3}\left[\frac{2xy^2 + x^3 - xy^2}{r^3}\boldsymbol{i} + \frac{y^3 - yx^2 + 2x^2 y}{r^3}\boldsymbol{j}\right] \\
&= -\frac{A^2}{r^3}\left[\frac{x(x^2+y^2)}{r^3}\boldsymbol{i} + \frac{y(x^2+y^2)}{r^3}\boldsymbol{j}\right] \\
&= -\frac{A^2}{r^3}\left[\frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j}\right] \\
&= -\frac{A^2}{r^3}\frac{\boldsymbol{r}}{r}.
\end{aligned}$$

b) Sentripetalakselerasjonen må ha retning normalt på en sirkelbue inn mot origo. Retningen til $\boldsymbol{a}$ er $-\boldsymbol{r}$ som peker inn mot origo.

c) Trykkgradienten kan finnes fra Euler-likninga:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}.$$

Feltet er stasjonært (uavhengig av tiden) og det er ingen ytre krefter som virker inn. Euler-likninga forenkler seg da til

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p \\
-\frac{A^2}{r^3}\frac{\boldsymbol{r}}{r} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p \\
\nabla p &= \rho\frac{A^2}{r^3}\frac{\boldsymbol{r}}{r}.
\end{aligned}$$

Vektoren $\boldsymbol{r}$ kan vi uttrykke i polakoordinater som $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r$. Gradientvektoren i polarkoordinater er

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\boldsymbol{i}_\theta.$$

Vi får følgende likninger for løsning av p:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{A^2}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad p(r,\theta) = \rho A^2 \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{r^2} \right) + f(\theta)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p = p(r) \quad \Rightarrow \quad f(\theta) = C.$$

Med betingelsen om at trykket uendelig langt fra origo er p_0 får vi $p(r \to \infty) = p_0 \Rightarrow C = p_0$ og trykket blir

$$p(r) = p_0 - \frac{\rho A^2}{2r^2}.$$

Oppgave 4

Gitt hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{x}{1+t}\boldsymbol{i} + \frac{2y}{1+t}\boldsymbol{j} - \frac{3z}{1+t}\boldsymbol{k}. \tag{10.1}$$

Den lokale akselerasjonen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} &= -\frac{x}{(1+t)^2}\boldsymbol{i} - \frac{2y}{(1+t)^2}\boldsymbol{j} + \frac{3z}{(1+t)^2}\boldsymbol{k} \\ &= -\frac{1}{(1+t)^2}\big[x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}\big]. \end{aligned}$$

Den konvektive akselerasjonen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} &= v_x\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \\ &= \frac{x}{1+t}\frac{\boldsymbol{i}}{1+t} + \frac{2y}{1+t}\frac{2\boldsymbol{j}}{1+t} - \frac{3z}{1+t}\left(-\frac{3\boldsymbol{k}}{1+t}\right) \\ &= \frac{1}{(1+t)^2}\big[x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 9z\boldsymbol{k}\big]. \end{aligned}$$

Oppgave 5

Gitt et hastighetsfelt:

$$\boldsymbol{v} = ax\boldsymbol{i} + 2ay\boldsymbol{j} - 3az\boldsymbol{k}, \quad a > 0.$$

a) Strømmen til en inkompressibel væske må være divergensfri:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = a + 2a - 3a = 0.$$

b) Feltet er stasjonært slik at akselerasjonen er gitt ved den konvektive akselerasjonen. Det nye feltet er identisk med feltet i likning 10.1 hvis vi setter $a = \dfrac{1}{1+t}$. Vi har da regnet ut den konvektive akselerasjonen før:

$$\boldsymbol{a} = a^2\big[x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 9a\boldsymbol{k}\big].$$

c) Euler-likninga for et stasjonært felt som ikke er påvirket av ytre krefter:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p \\
\nabla p &= -\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} \\
&= -\rho a^2\big[x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}+9a\boldsymbol{k}\big].
\end{aligned}$$

Størrelsen til trykkgradienten:

$$|\nabla p| = \rho a^2\sqrt{x^2+16y^2+81z^2}.$$

Retningen:

$$-\big[x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}+9z\boldsymbol{k}\big].$$

Oppgave 6

Vi har gitt et to-dimensjonalt hastighetsfelt

$$\boldsymbol{v} = \frac{Q}{r^2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$$

der Q er en konstant.

a) Vi har en strøm for en inkompressibel væske dersom divergensen er null:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= Q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+Q\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\
&= Q\frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}+Q\frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= Q\frac{x^2+y^2-2x^2+x^2+y^2-2y^2}{r^4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Strømlinjene finner vi fra likninga $\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{r}=0$, som blir $v_x\,dy = v_y\,dx$:

$$\frac{Q}{r^2}x\,dy = \frac{Q}{r^2}y\,dx.$$

Denne differensiallikninga er separabel, før vi integrerer forkorter vi så mye som mulig og sørger for at alle x'ene er på samme side som dx og alle y'ene er på samme side som dy:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y}dy &= \frac{1}{x}dx \\
\ln|y| &= \ln|x|+C \\
|y| &= e^{\ln|x|+C} \\
&= e^C e^{\ln|x|} \\
y &= Ax
\end{aligned}$$

Strømlinjene er altså rette linjer som går gjennom origo. Retningen avhenger av fortegnet til konstanten Q.

b) Massestrømmen er gitt ved integralet

$$M = \int_\sigma \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma$$

der $\boldsymbol{n}$ er normalvektoren til flaten σ. På en sylinderflate er $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_r$. La oss uttrykke vektorfeltet i polarkoordinater:

$$\boldsymbol{v} = \frac{Q}{r^2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \frac{Q}{r^2} r \boldsymbol{i}_r = \frac{Q}{r}\boldsymbol{i}_r.$$

Massestrømmen blir dermed

$$\begin{aligned} M &= \int_\sigma \rho \frac{Q}{r} \boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{i}_r \, d\sigma \\ &= \rho \frac{Q}{r} \int_\sigma d\sigma \\ &= \rho \frac{Q}{r} \cdot A \end{aligned}$$

der A er arealet til sylinderflaten: $A = 2\pi r h$ (h er høyden til sylinderen).

$$\begin{aligned} M &= \rho \frac{Q}{r} 2\pi r h \\ &= 2\pi \rho Q h. \end{aligned}$$

c) Akselerasjonen for en væskepartikkel i feltet er gitt ved den konvektive akselerasjonen siden feltet er stasjonært.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= v_x \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} \\ &= \frac{Q}{r^2} x \left[\frac{Q(x^2+y^2) - Qx \cdot 2x}{r^4} \boldsymbol{i} + \frac{-Qy \cdot 2x}{r^4} \boldsymbol{j} \right] \\ &\quad + \frac{Q}{r^2} y \left[\frac{-Qx \cdot 2y}{r^4} \boldsymbol{i} + \frac{Q(x^2+y^2) - Qy \cdot 2y}{r^4} \boldsymbol{j} \right] \\ &= \frac{Q^2}{r^4} \left[\frac{x(x^2+y^2-2x^2-2y^2)}{x^2+y^2} \boldsymbol{i} + \frac{y(x^2+y^2-2y^2-2x^2)}{x^2+y^2} \boldsymbol{j} \right] \\ &= \frac{Q}{r^4} \left[-x \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \boldsymbol{i} - y \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \boldsymbol{j} \right] \\ &= -\frac{Q^2}{r^4}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}). \end{aligned}$$

Oppgave 7

For en inkompressibel væske i en stasjonær strøm har vi

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0.$$

Massestrømmen i A:

$$\begin{aligned} M_A &= \int_\sigma \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma, \quad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = U \\ &= \rho U \int_\sigma d\sigma \\ &= \rho U A. \end{aligned}$$

Massestrømmen i a:

$$M_a = \int_\sigma \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma = \rho U_a \, a$$

der U_a er strømhastigheten i a som vi ønsker å finne. Siden vi har en inkompressibel væske må det strømme like mye gjennom A som a:

$$\begin{aligned} M_A &= M_a \\ \rho U A &= \rho U_a \, a \\ \Rightarrow \quad U_a &= \frac{UA}{a}. \end{aligned}$$

Vi ønsker nå å finne trykket i a. Hvis vi følger en strømlinje fra A til a vil $\mathcal{H}$ fra Bernoullis likning være konstant og vi får

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 + gz &= \frac{p_a}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{UA}{a}\right)^2 + gz \\ p_a &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho U^2 \frac{A^2}{a^2} \\ &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - \frac{A^2}{a^2}\right]. \end{aligned}$$

Oppgave 8

a) Massestrømmen i a:

$$\int_\sigma \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma = \rho U \int_\sigma d\sigma = \rho U a.$$

Massestrømmen i b (et av rørene):

$$\int_\sigma \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma = \rho U_b \int_\sigma d\sigma = \rho U_b \, b.$$

Vi har en inkompressibel væske så massestrømmen må være konstant:

$$\begin{aligned} \rho U a &= 2\rho U_b \, b \\ U_b &= \frac{Ua}{2b} \end{aligned}$$

b) Vi følger en strømlinje fra a til b (et av rørene):

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 + gz &= \frac{p_b}{\rho} + \frac{1}{2}\left(\frac{Ua}{2b}\right)^2 + gz \\
p_b &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\frac{U^2a^2}{4b^2} \\
&= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2\left[1 - \frac{a^2}{4b^2}\right].
\end{aligned}$$

Oppgave 9

a) Hvis vi bruker Bernoullis likning på en strømlinje fra overflaten av vannet (O) til tappestedet (P) får vi:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_0^2 = \frac{p_P}{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_P^2 - gh$$

der vi har lagt nullpunktet for høyden langs vannets overflate. Vi antar nå at trykket ved P er tilnærmet lik lufttrykket ved vannets overflate (p_0) og at strømhastigheten ved overflaten ($\boldsymbol{v}_0$) er mye mindre enn strømhastigheten i røret ($\boldsymbol{v}_P$) slik at $\boldsymbol{v}_0 \ll \boldsymbol{v}_P \Rightarrow \boldsymbol{v}_0 \approx 0$. Bernoullis likning forenkler seg dermed til

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}v_P^2 - gh \\
v_P &= \sqrt{2gh}.
\end{aligned}$$

b) Vi følger nå en strømlinje gjennom røret fra det høyeste punktet (A) til tappestedet (P). $\mathcal{H}$ er konstant og vi får

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 - g(h - H) = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_P^2 - gh.$$

Siden masseströmmen er konstant må $v_A = v_P$ (vann er inkompressibelt og tverrsnittet i røret antas konstant) og likninga over forenkler seg til

$$\begin{aligned}
p_A &= p_0 - \rho gh + \rho g(h - H) \\
&= p_0 - \rho gH.
\end{aligned}$$

c) Vi har at lufttrykket er gitt som $p_0 = 1.01325 \cdot 10^5\text{Pa}$. Vi ønsker at trykket i A (p_A) ikke skal bli lavere enn vannets damptrykk på $2.335 \cdot 10^3\text{Pa}$. Vi må altså løse ulikheten $p_A \geq 2.335 \cdot 10^3\text{Pa}$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad p_0 - \rho gH &\geq 2.335 \cdot 10^3\text{Pa} \\
H &\leq \frac{1}{\rho g}\left(p_0 - 2.335 \cdot 10^3\text{Pa}\right) \\
H &\leq \frac{1}{\rho g}\left(1.01325 \cdot 10^5\text{Pa} - 2.335 \cdot 10^3\text{Pa}\right) \\
H &\leq 9.899 \cdot 10^4\text{Pa}\,\frac{1}{\rho g}.
\end{aligned}$$

Oppgave 10

Fra oppgave 9.8 har vi strømkomponentene til en strøm omkring en sylinder i polarkoordinater

$$
\begin{aligned}
v_r &= U\left[1-\frac{a^2}{r^2}\right]\cos\theta \\
v_\theta &= -U\left[1+\frac{a^2}{r^2}\right]\sin\theta
\end{aligned}
$$

der $\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{i}_r + v_\theta\boldsymbol{i}_\theta$ og a er radius til sylinderen. La oss kalle et punkt på sylinderflaten for A og et punkt langt oppstrøms fra sylinderen for B. Følger vi en strømlinje fra A til B vil $\mathcal{H}$ fra Bernoullis likning være konstant og vi får

$$
\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_A^2 + gz = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_B^2 + gz. \tag{10.2}
$$

I punktet A:

$$
\begin{aligned}
v_r(r=a) &= 0 \\
v_\theta(r=a) &= -2U\sin\theta.
\end{aligned}
$$

I punktet B:

$$
\begin{aligned}
r \gg a \quad &\Rightarrow \quad v_r = U\cos\theta, \quad v_\theta = -U\sin\theta \\
\theta = 0 \quad &\Rightarrow \quad v_r = U, \quad v_\theta = 0 \\
p_B = p_0 &
\end{aligned}
$$

Innsatt i likning 10.2 gir dette

$$
\begin{aligned}
\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}(-2U\sin\theta)^2 &= \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 \\
p_A &= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 - 2\rho U^2\sin^2\theta \\
&= p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2\left[1 - 4\sin^2\theta\right].
\end{aligned}
$$