Kapittel 2

Gradientvektoren, vektorfelt, strømlinjer, feltlinjer

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x, y, z) = x^2y + z^2x$. Vi regner først ut de partielt deriverte med hensyn på x, y og z:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2zx.$$

De dobbeltderiverte blir nå

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2x, \qquad & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= 2z \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 2x, \qquad & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} &= 2z.
\end{aligned}$$

Oppgave 2

Taylor-approksimasjonen av første orden til en funksjon $f = f(x)$ om punktet x_0 er gitt ved

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

For funksjoner av to variable, $g = g(x, y)$, om punktet (x_0, y_0) har vi

$$T_1(x, y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

der g_x og g_y betegner de partielt deriverte av g med hensyn på henholdsvis x og y.

a) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad f'(x) = \cos x.$

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= \sin 0 + \cos 0 \cdot (x - 0) \\
&= 0 + 1 \cdot x \\
&= x.
\end{aligned}$$

b) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0, \quad f'(x) = -\sin x.$

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= \cos 0 - \sin 0 \cdot (x - 0) \\
&= 1 - 0 \cdot x \\
&= 1.
\end{aligned}$$

c) $f(x) = e^{x^2}, \quad f'(x) = 2xe^{x^2}$.

$$\begin{aligned} x_0 = 0: \quad T_1(x) &= e^0 + 2\cdot 0\cdot e^0(x-0) \\ &= 1 + 0\cdot(x-0) \\ &= 1 \\ x_0 = 1: \quad T_1(x) &= e^1 + 2\cdot 1\cdot e^1(x-1) \\ &= e + 2e(x-1) \\ &= e(2x-1). \end{aligned}$$

d) $f(x) = \sin\sqrt{x}, \quad x_0 = \pi^2, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cos\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} T_1(x) &= \sin\pi + \frac{1}{2}(\pi^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\pi(x-\pi^2) \\ &= 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}(-1)(x-\pi^2) \\ &= -\frac{1}{2\pi}(x-\pi^2). \end{aligned}$$

e) $g(x,y) = \sin x\cos y, \quad (x_0,y_0) = (0,0), \quad g_x = \cos x\cos y, \quad g_y = -\sin x\sin y$.

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= \sin 0\cos 0 + \cos 0\cos 0(x-0) - \sin 0\sin 0(y-0) \\ &= 0 + 1\cdot(x-0) - 0\cdot(y-0) \\ &= x. \end{aligned}$$

f) $g(x,y) = xy^2 - e^{x+y}, \quad (x_0,y_0) = (1,-1), \quad g_x = y^2 - e^{x+y}, \quad g_y = 2xy - e^{x+y}$.

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= 1\cdot(-1)^2 - e^{1-1} + \big((-1)^2 - e^{1-1}\big)(x-1) + \big(2\cdot 1\cdot(-1) - e^{1-1}\big)(y+1) \\ &= 1 - 1 + (1-1)(x-1) + (-2-1)(y+1) \\ &= -3y - 3. \end{aligned}$$

g) $g(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}, \quad (x_0,y_0) = (-1,2)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{y\big(1+x^2+y^2\big) - xy\cdot 2x}{\big(1+x^2+y^2\big)^2} = \frac{y - x^2y + y^3}{\big(1+x^2+y^2\big)^2} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{x\big(1+x^2+y^2\big) - xy\cdot 2y}{\big(1+x^2+y^2\big)^2} = \frac{x - xy^2 + x^3}{\big(1+x^2+y^2\big)^2} \\ T_1(x,y) &= \frac{-2}{1+1+4} + \frac{2-2+8}{36}(x+1) + \frac{-1+4-1}{36}(y-2) \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}(x+1) + \frac{1}{18}(y-2) \\ &= \frac{4x+y-4}{18}. \end{aligned}$$

Oppgave 3

Taylor-approksimasjonen av andre orden til en funksjon $f = f(x)$ om punktet x_0 er gitt ved

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

a) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x.$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 0 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (x - 0)^2 \\ &= x. \end{aligned}$$

b) $f(c) = \cos x, \quad x_0 = 0, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x.$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 1 + 0 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2}(-1)(x - 0)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

c) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 2, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$

$$T_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2.$$

d) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}, \quad x_0 = -1, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}, \quad f''(x) = \frac{1}{2}e^{-x}.$

$$T_2(x) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e(x + 1) + \frac{1}{4}e(x + 1)^2.$$

Oppgave 4

Vi følger hintet og rekkeutvikler teller

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

og nevner

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$$

Så utfører vi en polynomdivisjon og beholder kun ledd til andre orden

$$\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}{x - \frac{x^3}{6}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

Så kan vi sette inn verdien $x = 0.01$

$$\frac{\log(1.01)}{\sin(0.01)} \approx 0.99505.$$

Legg merke til at det er nødvendig å rekkeutvikle både teller og nevner til tredje orden for at sluttresultatet skal bli nøyaktig til andre orden, det skyldes at rekkeutviklingene til både teller og nevner starter med ledd av første orden.

Oppgave 5

Gradienten til et skalarfelt β, også kalt gradientvektoren, er definert ved

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Vi skal i denne oppgaven benytte oss av $\boldsymbol{r}$-vektoren:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \quad |\boldsymbol{r}| = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

a) $\beta = x^2 + xy + z^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial x} &= 2x + y \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} &= x \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} &= 2z \\ \Rightarrow \quad \nabla\beta &= (2x + y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

b) $\beta = e^{-(xy+z)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial x} &= e^{-(xy+z)} \cdot (-y) \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} &= e^{-(xy+z)} \cdot (-x) \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} &= e^{-(xy+z)} \cdot (-1) \\ \Rightarrow \quad \nabla\beta &= -e^{-(xy+z)}(y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}). \end{aligned}$$

c) $\beta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\beta}{\partial x} &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial\beta}{\partial y} &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial\beta}{\partial z} &= \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \Rightarrow \quad \nabla\beta &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{\boldsymbol{r}}{r}. \end{aligned}$$

d) $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x \\
\frac{\partial\beta}{\partial y} &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y \\
\frac{\partial\beta}{\partial z} &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2z \\
\Rightarrow \quad \nabla\beta &= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.
\end{aligned}$$

e) $\beta = \beta(r), \quad r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= \frac{d\beta}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{d\beta}{dr}\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{d\beta}{dr}\frac{x}{r} \\
\frac{\partial\beta}{\partial y} &= \frac{d\beta}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{d\beta}{dr}\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2y = \frac{d\beta}{dr}\frac{y}{r} \\
\frac{\partial\beta}{\partial z} &= \frac{d\beta}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{d\beta}{dr}\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2z = \frac{d\beta}{dr}\frac{z}{r} \\
\Rightarrow \quad \nabla\beta &= \frac{d\beta}{dr}\frac{1}{r}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = \frac{d\beta}{dr}\frac{\boldsymbol{r}}{r}.
\end{aligned}$$

Vi kontrollerer ved å sammenlikne resultatene fra deloppgavene c) og d):

c) $\beta = r \quad \Rightarrow \quad \nabla\beta = 1\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}.$ Ok!

d) $\beta = \dfrac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \nabla\beta = -\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$ Ok!

Oppgave 6

Gradienten til et skalarfelt β er definert ved

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

a) $\nabla\beta = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= yz \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = xyz + f_1(y,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial y} &= xz \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = xyz + f_2(x,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial z} &= xy \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = xyz + f_3(x,y).
\end{aligned}$$

For å få en entydig β må vi velge $f_1 = f_2 = f_3 = C$ (= konstant) slik at

$$\beta(x,y,z) = xyz + C.$$

b) $\nabla\beta = \cos(yz)\boldsymbol{i} - xz\sin(yz)\boldsymbol{j} - xy\sin(yz)\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= \cos(yz) \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = x\cos(yz) + f_1(y,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial y} &= -xz\sin(yz) \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = x\cos(yz) + f_2(x,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial z} &= -xy\sin(yz) \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = x\cos(yz) + f_3(x,y).
\end{aligned}$$

Entydig β krever $f_1 = f_2 = f_3 = C$:

$$\beta(x,y,z) = x\cos(yz) + C.$$

c) $\nabla\beta = -e^{-x}\boldsymbol{i} - e^{-y}\boldsymbol{j} - e^{-z}\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= -e^{-x} \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = e^{-x} + f_1(y,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial y} &= -e^{-y} \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = e^{-y} + f_2(x,z) \\
\frac{\partial\beta}{\partial z} &= -e^{-z} \quad \Rightarrow \quad \beta(x,y,z) = e^{-z} + f_3(x,y).
\end{aligned}$$

Her må vi velge funksjonene f_1, f_2 og f_3 slik at

$$\begin{aligned}
f_1(y,z) &= e^{-y} + e^{-z} + C \\
f_2(x,z) &= e^{-x} + e^{-z} + C \\
f_3(x,y) &= e^{-x} + e^{-y} + C \\
\Rightarrow \quad \beta(x,y,z) &= e^{-x} + e^{-y} + e^{-z} + C.
\end{aligned}$$

Oppgave 7

Definisjonen av gradientvektoren av en skalarfunksjon β er

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

a)

$$\begin{aligned}
\nabla(\alpha+\beta) &= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha+\beta)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha+\beta)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha+\beta)\boldsymbol{k} \\
&= \frac{\partial\alpha}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\boldsymbol{k} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k} \\
&= \nabla\alpha + \nabla\beta.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\nabla(c\beta) &= \frac{\partial}{\partial x}(c\beta)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(c\beta)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(c\beta)\boldsymbol{k} \\
&= c\frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + c\frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + c\frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k} \\
&= c\nabla\beta.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\nabla(\alpha\beta) &= \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\beta)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha\beta)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\beta)\boldsymbol{k} \\
&= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\beta + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\beta + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\beta + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\boldsymbol{k} \\
&= \beta\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) + \alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \\
&= \beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{1}{\beta}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\beta}\right)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\beta}\right)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\beta}\right)\boldsymbol{k} \\
&= -\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k} \\
&= -\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \\
&= -\frac{1}{\beta^2}\nabla\beta.
\end{aligned}$$

Oppgave 8

Vi har gitt temperaturmodellen

$$T = T_0\frac{R}{r} \tag{2.1}$$

der T_0 og R er konstanter og $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$.

a) Vi regner først ut temperaturgradienten i et vilkårlig punkt:

$$\nabla T = \nabla\left(T_0\frac{R}{r}\right) = T_0 R\nabla\left(\frac{1}{r}\right).$$

Den siste likheten får vi fra oppgave 8b. Fra oppgave 5d får vi følgende resultat:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

som gir oss temperaturgradienten

$$\nabla T = -\frac{T_0 R}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Ved jordoverflaten er $r = R$ og

$$\nabla T = -\frac{T_0}{R^2}\boldsymbol{r}.$$

Retningen er her $-\boldsymbol{r}$, dvs. fra jordoverflaten og inn mot sentrum av jorden, mens størrelsen blir

$$|\nabla T| = \frac{T_0}{R^2}|\boldsymbol{r}| = \frac{T_0}{R}.$$

MERK: Oppgaven spør om retning, men ikke om retningsvektor med enhets lengde. Det er derfor valgfritt om vi angir retningen ved en vektor med vilkårlig lengde.

b) Vi skalerer T med temperaturkonstanten T_0 og r med avstandskonstanten R. Da får vi to nye dimensjonsløse variabler:

$$T^* = \frac{T}{T_0}, \quad r^* = \frac{r}{R}.$$

Vi kan nå sette $T = T^* T_0$ og $r = r^* R$ inn i likning 2.1:

$$\begin{aligned} T^* T_0 &= T_0 \frac{R}{r^* R} \\ T^* &= \frac{1}{r^*}. \end{aligned}$$

Oppgave 9

Et fjellpass er beskrevet ved

$$h(x, y) = h_0 + \frac{a}{R^2} xy \tag{2.2}$$

der h_0, R og a er konstanter.

a) Høydekonturene finner vi ved å sette $h(x, y) = C =$ konstant:

$$\begin{aligned} C &= h_0 + \frac{a}{R^2} xy \\ xy &= \frac{C - h_0}{a} R^2. \end{aligned}$$

Hvis $C = h_0$ har vi at $xy = 0$ som gir $x = 0$ og $y = 0$. Både x- og y-aksen er altså høydekonturer. Hvis $C \neq h_0$ har vi:

$$y = R^2 \frac{C - h_0}{a} \frac{1}{x}.$$

For $x = R$ og $y = R$:

$$R = \frac{C - h_0}{a} R \quad \Rightarrow \quad C = h_0 + a \quad (= 1450\text{m})$$

For $x = R$ og $y = -R$:

$$-R = \frac{C - h_0}{a} R \quad \Rightarrow \quad C = h_0 - a \quad (= 950\text{m})$$

o.s.v.

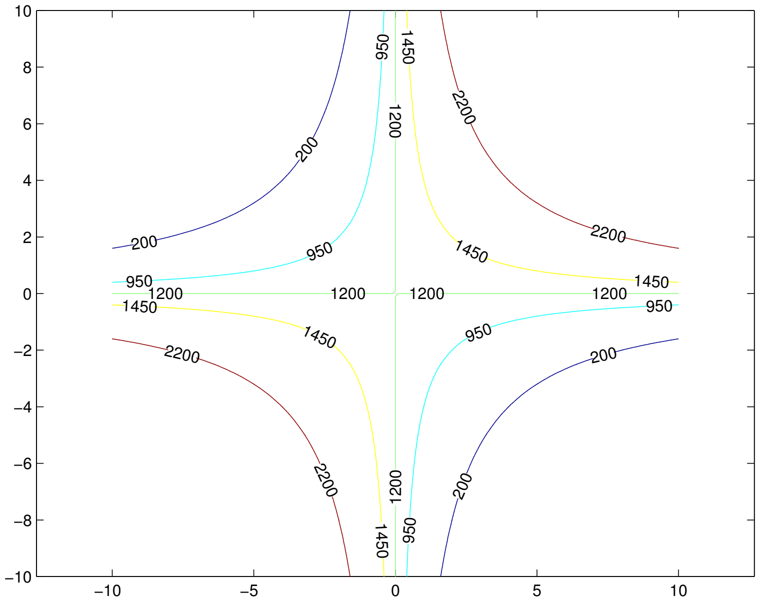
b) Gradientvektoren peker mot større verdier av skalarfunksjonen:

$$\begin{aligned} \nabla h &= \frac{\partial h}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \boldsymbol{j} \\ &= \frac{a}{R^2} (y \boldsymbol{i} + x \boldsymbol{j}). \end{aligned}$$

Størrelsen til gradientvektoren sier hvor bratt stigningen er:

$$|\nabla h| = \frac{a}{R^2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Stigningen er altså like bratt på sirkler med sentrum i origo og det blir brattere jo lenger vekk fra origo vi kommer.



Figur 2.1: Konturlinjene til fjellpassmodellen (2.2)

c) Det er mange måter å løse denne oppgaven. En opplagt måte er å innføre nye dimensjonsløse variabler:

$$h^* = \frac{h}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{R}, \quad y^* = \frac{y}{R}.$$

Vi kan nå sette $h = h^* h_0$, $x = x^* R$ og $y = y^* R$ inn i likning 2.2:

$$\begin{aligned} h^* h_0 &= h_0 + \frac{a}{R^2} x^* R y^* R \\ h^* &= 1 + \frac{a}{h_0} x^* y^*. \end{aligned}$$

Brøken a/h_0 er dimensjonsløs siden både a og h_0 har dimensjon meter. Vi markerer dette ved å innføre $a^* = a/h_0$ slik at den dimensjonsløse likningen blir

$$h^* = 1 + a^* x^* y^*.$$

En bedre måte er å innføre

$$h^* = \frac{h}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{R}\sqrt{\frac{a}{h_0}}, \quad y^* = \frac{y}{R}\sqrt{\frac{a}{h_0}}.$$

Da oppnår vi at konstanten a blir borte slik at den dimensjonsløse likningen blir

$$h^* = 1 + x^* y^*.$$

En enda bedre måte er å innføre

$$h^* = \frac{h - h_0}{a}, \quad x^* = \frac{x}{R}, \quad y^* = \frac{y}{R}.$$

Da oppnår vi at både konstanten a og konstantleddet blir borte slik at den dimensjonsløse likningen blir

$$h^* = x^* y^*.$$

Oppgave 10

a) $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}, \quad u = a, \quad v = b.$

$$\begin{aligned} u\,dy &= v\,dx \\ a\,dy &= b\,dx \\ \int a\,dy &= \int b\,dx \\ ay &= bx + C \\ y &= \frac{b}{a}x + C. \end{aligned}$$

(C er en vilkårlig konstant $\Rightarrow C/a = C$.)

b) $\boldsymbol{v} = ay\boldsymbol{i} + bx\boldsymbol{j}, \quad u = ay, \quad v = bx.$

$$\begin{aligned} u\,dy &= v\,dx \\ ay\,dy &= bx\,dx \\ \int ay\,dy &= \int bx\,dx \\ \frac{1}{2}ay^2 &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ y^2 &= \frac{b}{a}x^2 + C \\ y &= \pm\sqrt{\frac{b}{a}x^2 + C}. \end{aligned}$$

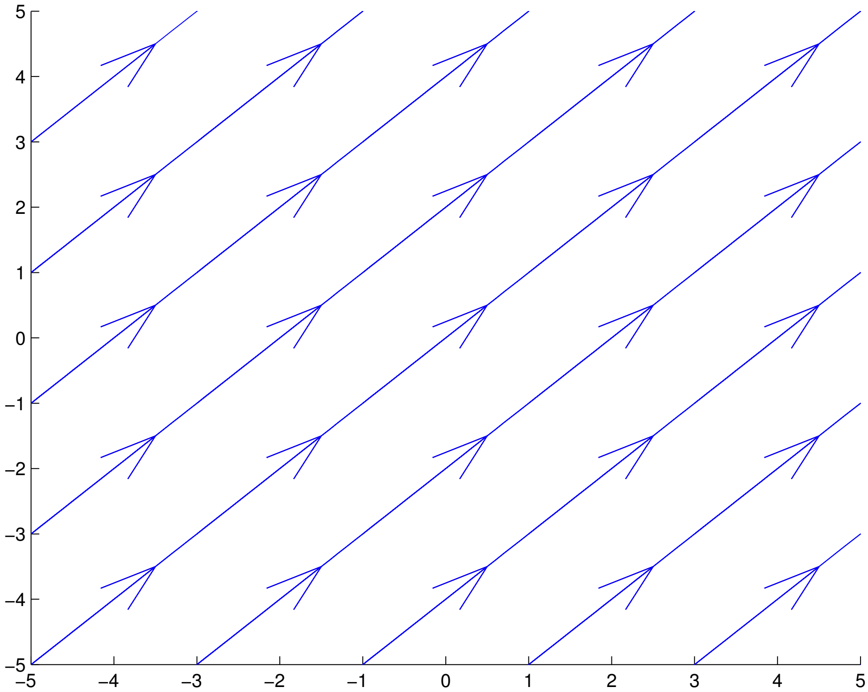
Hvis a er negativ får vi

$$y^2 + \alpha x^2 = C, \quad \alpha = -\frac{b}{a} > 0$$

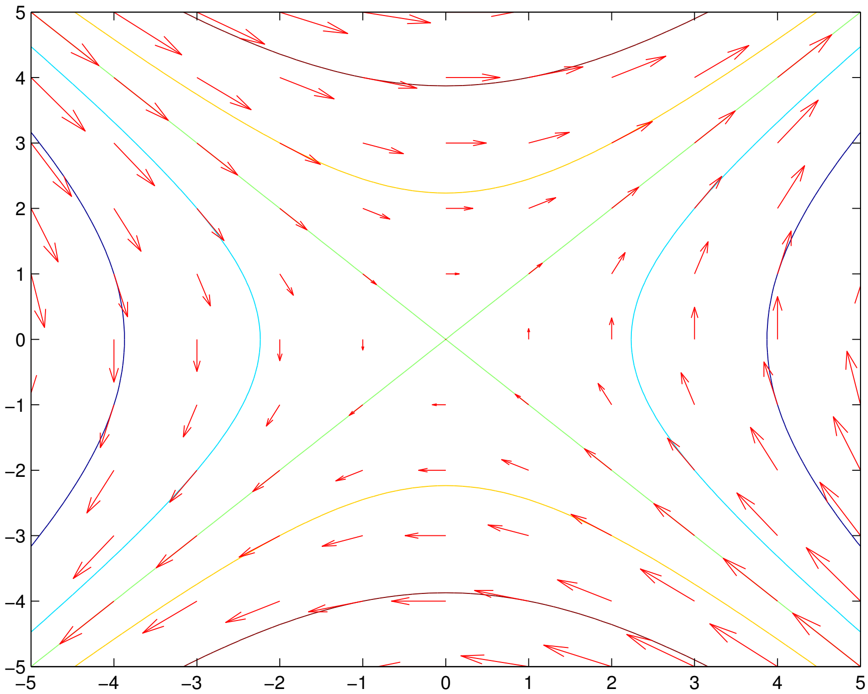
og strømlinjene blir ellipser med sentrum i origo.

c) $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + bx\boldsymbol{j}, \quad u = a, \quad v = bx.$

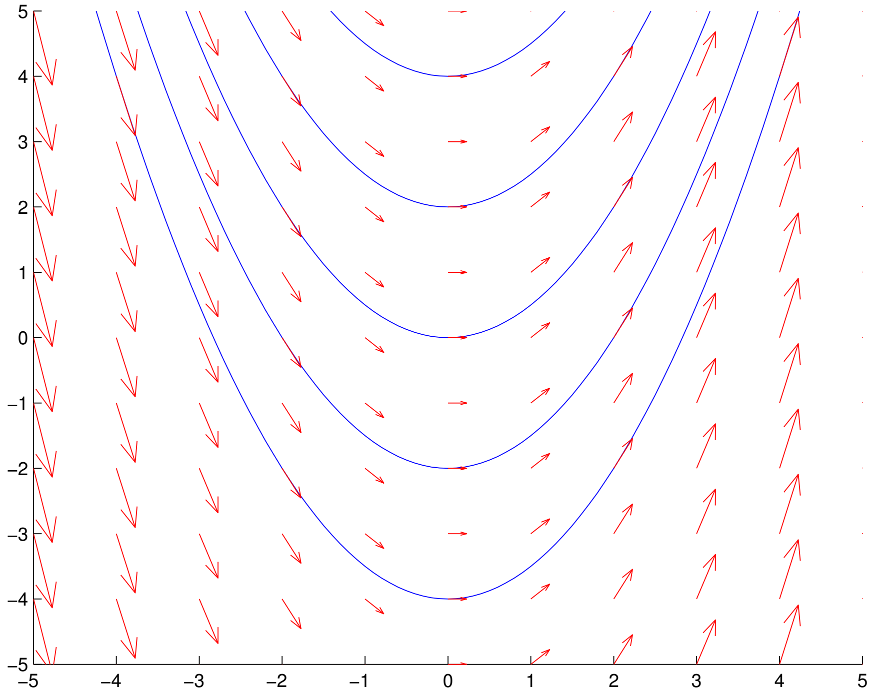
$$\begin{aligned} u\,dy &= v\,dx \\ a\,dy &= bx\,dx \\ \int a\,dy &= \int bx\,dx \\ ay &= \frac{1}{2}bx^2 + C \\ y &= \frac{b}{2a}x^2 + C. \end{aligned}$$



Figur 2.2: Konturlinjene $C = -8, -6, \ldots, 6, 8$ til vektorfeltet $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ der $a = b = 1$.



Figur 2.3: Konturlinjene $C = -15, -5, 0, 5, 15$ til vektorfeltet $\boldsymbol{v} = ay\boldsymbol{i} + bx\boldsymbol{j}$ der $a = b = 1$.



Figur 2.4: Konturlinjene $C = -4, -2, 0, 2, 4$ til vektorfeltet $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + bx\boldsymbol{j}$ der $a = b = 1$.

Oppgave 11

Gitt vektorfeltet

$$\boldsymbol{v} = -\frac{cy}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{cx}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}.$$

Vi finner som vanlig strømlinjene ved å sette inn i formelen $u\,dy = v\,dx$. Før vi integrerer må vi huske på å forkorte så mye som mulig.

$$\begin{aligned}
-\frac{cy}{x^2+y^2}\,dy &= \frac{cx}{x^2+y^2}\,dx \\
-y\,dy &= x\,dx \\
-\int y\,dy &= \int x\,dx \\
-\frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{2}x^2 + C \\
x^2+y^2 &= 2C.
\end{aligned}$$

Strømlinjene blir sirkler med sentrum i orgio.

Oppgave 12

La oss først finne $\boldsymbol{v}$ uttrykt ved hjelp av β:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \nabla\beta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{j}.$$

Strømlinjene er gitt ved likningen

$$\begin{aligned} u\,dy &= v\,dx \\ -\frac{\partial\beta}{\partial y}\,dy &= \frac{\partial\beta}{\partial x}\,dx \\ \frac{\partial\beta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\beta}{\partial y}\,dy &= 0. \end{aligned}$$

Venstresiden over kjenner vi igjen som $d\beta$, tilveksten i β. Hvis tilveksten i β er null må β være konstant. Strømlinjene til vektorfunksjonen $\boldsymbol{v}$ er altså gitt ved

$$\beta(x, y) = \beta_0 = \text{konstant}.$$

Oppgave 13

Vi har gitt et hastighetsfelt

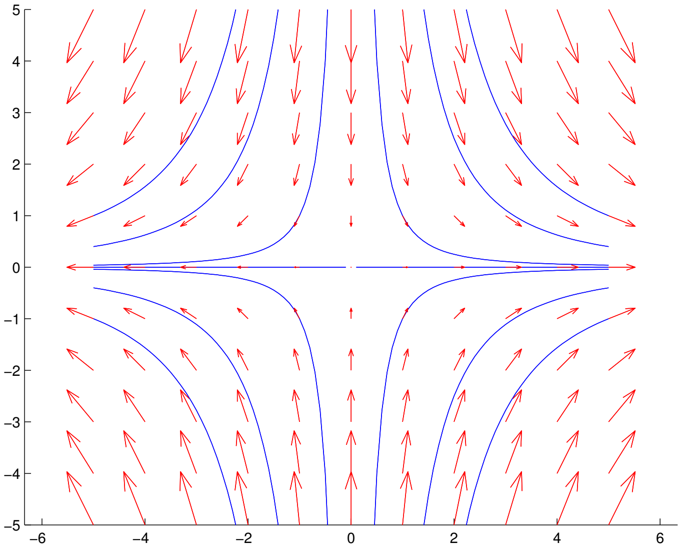
$$\boldsymbol{v} = 2kx\boldsymbol{i} + 2ky\boldsymbol{j} - 4kz\boldsymbol{k}, \quad k > 0.$$

a) I xz-planet har $\boldsymbol{v}$ komponentene $u = 2kx$ og $w = -4kz$. Likningen for strømlinjene blir

$$\begin{aligned} u\,dz &= w\,dx \\ 2kx\,dz &= -4kz\,dx. \end{aligned}$$

Før vi går løs på integreringen, må vi forkorte så mye som mulig og sørge for at alle uttrykk med x er på samme side som dx og alle uttrykk med z er på samme side som dz.

$$\begin{aligned} x\,dz &= -2z\,dx \\ \frac{1}{z}\,dz &= -\frac{2}{x}\,dx \\ \int \frac{1}{z}\,dz &= -2\int \frac{1}{x}\,dx \\ \ln z &= -2\ln x + C \\ e^{\ln z} &= e^{-2\ln x + C} \\ z &= e^{\ln x^{-2}} \cdot e^{C} \\ z &= Cx^{-2} \\ z &= \frac{C}{x^2}. \end{aligned}$$

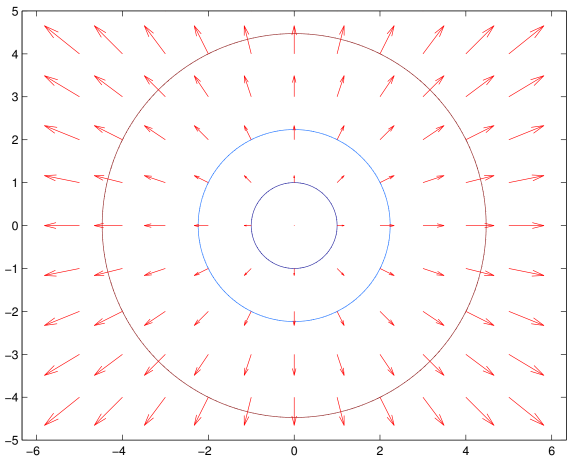


Figur 2.5: Konturlinjene $C = -25, -10, -1, 0, 1, 10, 25$ til vektorfeltet $\boldsymbol{v} = 2kx\boldsymbol{i} - 4kz\boldsymbol{k}$ der $k = 1$.

b) Det er tre måter strømmen kan være aksesymmetrisk på: om x-aksen, om y-aksen eller om z-aksen. Strømstyrken i xy-planet er gitt ved:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{4k^2x^2 + 4k^2y^2} = 2k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vi har samme strømstyrke på sirkler med sentrum i origo. Retningen er gitt ved $\boldsymbol{v} = 2k(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = 2k\boldsymbol{r}$. Vi har altså symmetri om z-aksen.



Figur 2.6: Vektorfeltet $\boldsymbol{v} = 2kx\boldsymbol{i} + 2ky\boldsymbol{j}$ er symmetrisk om z-aksen.