Kapittel 4

Vektorfluks og sirkulasjon, divergens, virvling, strømfunksjonen

Oppgave 1

Gitt et vektorfelt

$$\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}.$$

Divergensen til $\boldsymbol{v}$ er definert som

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

og virvlingen er gitt ved determinanten

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}.$$

a) $\boldsymbol{v} = xy^2z^3\boldsymbol{i} + xy^2z^3\boldsymbol{j} + xy^2z^3\boldsymbol{k}$.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = y^2z^3 + 2xyz^3 + 3xy^2z^2.$$

Virvling:

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^3 & xy^2z^3 & xy^2z^3 \end{vmatrix} \\ &= \left(2xyz^3 - 3xy^2z^2\right)\boldsymbol{i} - \left(y^2z^3 - 3xy^2z^2\right)\boldsymbol{j} + \left(y^2z^3 - 2xyz^3\right)\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{v} = e^{yz}\boldsymbol{i} + e^{xz}\boldsymbol{j} + e^{xy}\boldsymbol{k}$.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Virvling:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{yz} & e^{xz} & e^{xy} \end{vmatrix} \\
&= \Big(xe^{xy} - xe^{xz}\Big)\boldsymbol{i} - \Big(ye^{xy} - ye^{yz}\Big)\boldsymbol{j} + \Big(ze^{xz} - ze^{yz}\Big)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

c) $\boldsymbol{v} = e^{x^2}\boldsymbol{i} + \sin(xy)\boldsymbol{j} - \cos(z^2)\boldsymbol{k}$.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2xe^{x^2} + x\cos(xy) + 2z\sin(z^2).$$

Virvling:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{x^2} & \sin(xy) & \cos(z^2) \end{vmatrix} \\
&= y\cos(xy)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

d) $\boldsymbol{v} = (x+y+z)^2\boldsymbol{i} + \frac{xy}{z}\boldsymbol{k}$.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2(x+y+z) - \frac{xy}{z^2}.$$

Virvling:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x+y+z)^2 & 0 & \frac{xy}{z} \end{vmatrix} \\
&= \frac{x}{z}\boldsymbol{i} - \Big(\frac{y}{z} - 2(x+y+z)\Big)\boldsymbol{j} - 2(x+y+z)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) $\boldsymbol{v} = u(z)\boldsymbol{i}, \quad u(z) = \dfrac{U_0 z^2}{h^2}, \quad 0 \le z \le h, \quad U_0 = \text{konstant}, \quad h = \text{konstant}.$

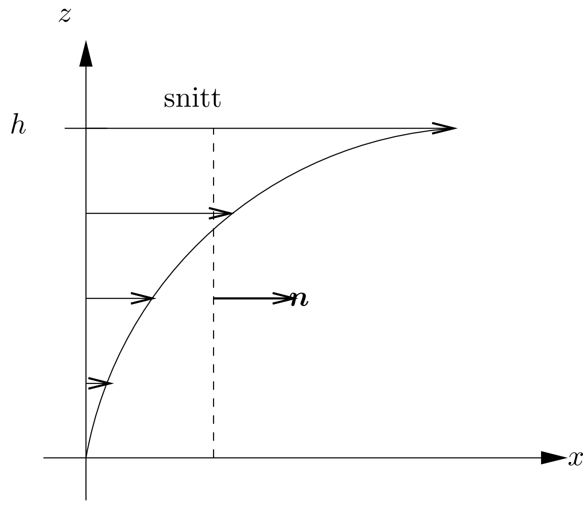
Vi antar at problemet er to-dimensjonalt i xz-planet.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Virvling:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{j} = \frac{2U_0 z}{h^2}\boldsymbol{j}.$$



Figur 4.1: Vindprofilet til $\boldsymbol{v} = \dfrac{U_0 z^2}{h^2}\boldsymbol{i}$.

Strømfunksjonen $\psi(x, z)$ finner vi ved å løse likningssystemet

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -u \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = w. \tag{4.2}$$

Fra (4.2) får vi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \psi(z).$$

Vi setter inn for u i (4.1) og integrerer:

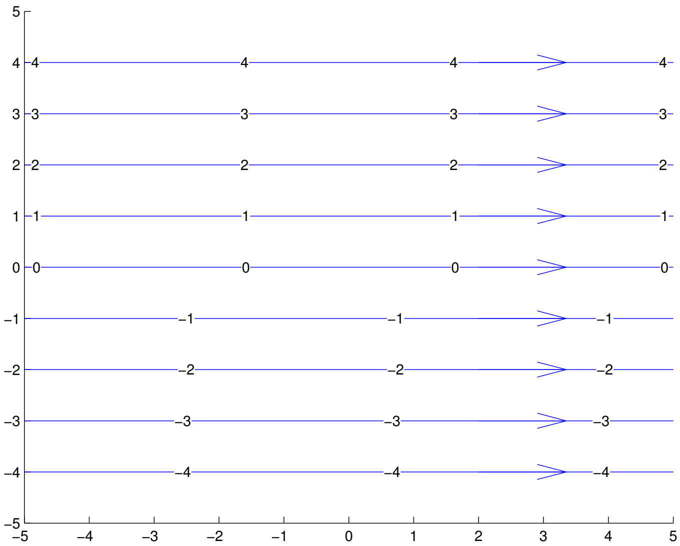
$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -\frac{U_0 z^2}{h^2} \\ \Rightarrow \quad \psi(z) &= -\frac{1}{3}\frac{U_0}{h^2} z^3 + C. \end{aligned}$$

Siden ψ her er en funksjon av bare z får vi en integrasjonskonstant C i stedet for en funksjon $f(x)$. Strømlinjene finner vi ved å sette $\psi = \psi_0 =$ konstant:

$$\begin{aligned} z^3 &= \frac{-3h^2(\psi_0 - C)}{U_0} \\ &= C^3 \quad \text{(Brøken er konstant)} \\ \Rightarrow \quad z &= C. \end{aligned}$$

Dette gir rette horisontale linjer (se figur 4.2). Volumstrømmen er gitt ved

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma$$



Figur 4.2: Strømlinjene til $\boldsymbol{v} = u(z)\boldsymbol{i}$ er rette horisontale linjer.

der $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$ er en normalvektor til snittet (se figur 4.1). $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i} = u(z)$ slik at vi får

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_0^h u(z)\,dz \\
&= \frac{U_0}{h^2}\int_0^h z^2\,dz \\
&= \frac{1}{3}U_0 h.
\end{aligned}
$$

Vi skal til slutt vise at volumstrømmen er lik differansen i strømfunksjonens verdi mellom bakken og $z = h$:

$$
\begin{aligned}
Q &= \psi(z{=}0) - \psi(z{=}h) \\
&= C + \frac{1}{3}\frac{U_0}{h^2}h^3 - C \\
&= \frac{1}{3}U_0 h.
\end{aligned}
$$

b) $\boldsymbol{v} = u(z)\boldsymbol{i}, \quad u(z) = U_0 \ln\left(\frac{z+h}{h}\right), \quad 0 \le z \le h, \quad U_0 = \text{konstant}, \quad h = \text{konstant}.$

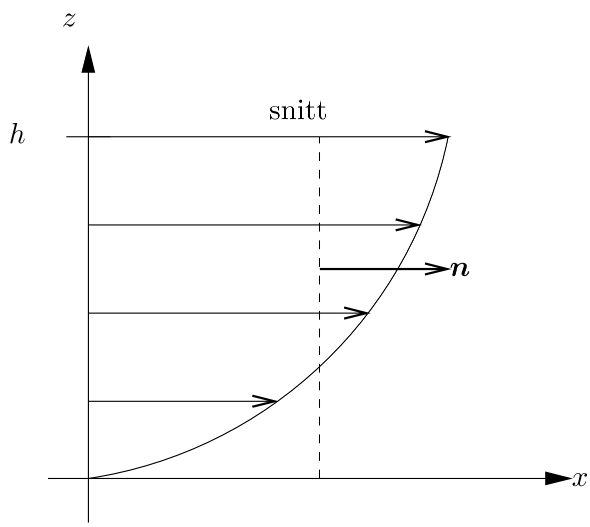
Vi antar at problemet er to-dimensjonalt i xz-planet.

Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Virvling:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{j} = \frac{U_0}{z+h}\boldsymbol{j}.$$



Figur 4.3: Vindprofilet til $\boldsymbol{v} = U_0 \ln\left(\frac{z+h}{h}\right)\boldsymbol{i}$.

Strømfunksjonen $\psi(x, z)$ finner vi ved å løse likningssystemet

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -u \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = w. \tag{4.4}$$

Fra (4.4) får vi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \psi(z).$$

Vi setter inn for u i (4.3) og integrerer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -U_0 \ln\left(\frac{z+h}{h}\right) \\ \Rightarrow \quad \psi(z) &= -U_0 \int \ln u \, dz \end{aligned}$$

der

$$u = \frac{z+h}{h}, \qquad \frac{du}{dz} = \frac{1}{h}, \qquad dz = h\,du.$$

Videre blir strømfunksjonen

$$\begin{aligned} \psi(z) &= -U_0 h \int \ln u \, du \\ &= -U_0 h \left[u \ln u - \int \frac{u}{u}\, du \right] + C \\ &= -U_0 h \Big[u\big(\ln u - 1\big)\Big] + C \\ &= -U_0 \big(z+h\big) \left[\ln\left(\frac{z+h}{h}\right) - 1 \right] + C. \end{aligned}$$

Vi har her brukt substitusjon og delvis integrasjon til å løse integralet. Siden ψ her er en funksjon av bare z får vi en integrasjonskonstant C i stedet for en funksjon $f(x)$. Strømlinjene finner vi ved å sette $\psi = \psi_0 =$ konstant. Siden $\psi = \psi_0$ inneholder kun en variabel, z, og resten konstanter, får vi at $z =$ konstant som gir rette horisontale linjer som i oppgave a (se figur 4.2).

Volumstrømmen er gitt ved

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma$$

der $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$ er en normalvektor til snittet (se figur 4.3). $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i} = u(z)$ slik at vi får

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^h u(z)\, dz \\
&= U_0 \int_0^h \ln\left(\frac{z+h}{h}\right) dz \\
&= \left[U_0\big(z+h\big)\left[\ln\left(\frac{z+h}{h}\right) - 1\right]\right]_0^h \\
&= 2U_0 h\big(\ln 2 - 1\big) - U_0 h\big(\ln 1 - 1\big) \\
&= U_0 h\big(2\ln 2 - 1\big).
\end{aligned}$$

Vi skal til slutt vise at volumstrømmen er lik differansen i strømfunksjonens verdi mellom bakken og $z = h$:

$$\begin{aligned}
Q &= \psi(z{=}0) - \psi(z{=}h) \\
&= -U_0 h\left[\ln\left(\frac{h}{h}\right) - 1\right] + C + U_0 2h\left[\ln\left(\frac{2h}{h}\right) - 1\right] - C \\
&= U_0 h + 2U_0 h\big(\ln 2 - 1\big) \\
&= U_0 h\big(2\ln 2 - 1\big).
\end{aligned}$$

Oppgave 3

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= ax^2\boldsymbol{i} + v(x,y)\boldsymbol{j} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2ax + \frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Skal feltet være divergensfritt må

$$\begin{aligned}
2ax + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= -2ax.
\end{aligned}$$

Vi integrerer med hensyn på y:

$$v(x,y) = -2axy + f(x).$$

Feltet er nå divergensfritt for et hvert valg av $f(x)$. Videre i oppgaven skal vi begrense oss til tilfellet $v(0,0) = 0$, da må vi velge $f(x) = 0$, slik at

$$\boldsymbol{v} = ax^2\boldsymbol{i} - 2axy\boldsymbol{j}.$$

Strømfunksjonen $\psi(x,y)$ kan vi finne fra likningene

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -u \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v. \tag{4.6}$$

Dette gir

$$(4.5): \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -ax^2 \quad \Rightarrow \quad \psi(x,y) = -ax^2y + f_1(x)$$

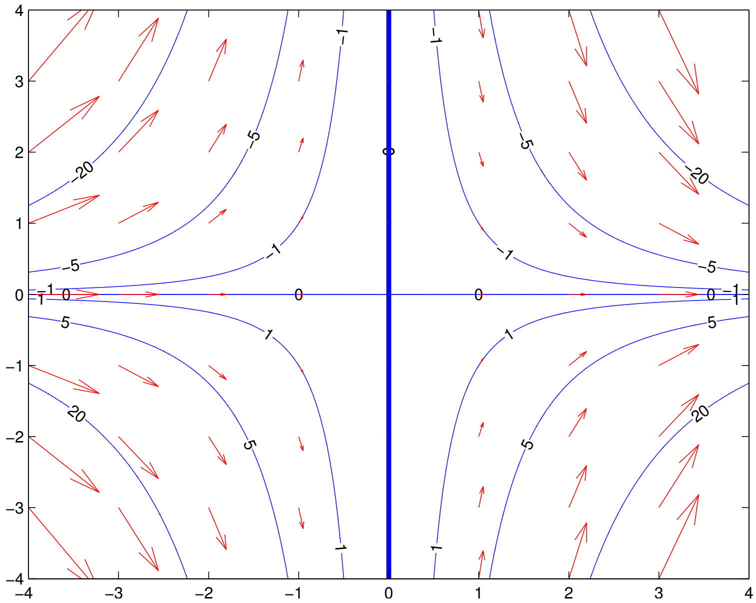
$$(4.6): \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2axy \quad \Rightarrow \quad \psi(x,y) = -ax^2y + f_2(y).$$

For å få en mulig ψ må vi velge $f_1(x) = f_2(y) = C$, og strømfunksjonen blir

$$\psi(x,y) = -ax^2y + C.$$

Strømlinjene finner vi ved å sette $\psi = \psi_0$:

$$y = \frac{C - \psi_0}{ax^2} = \frac{C}{x^2}.$$



Figur 4.4: Vektorfeltet $\boldsymbol{v} = ax^2\boldsymbol{i} - 2axy\boldsymbol{j}$ med strømlinjer for $a = 1$. Strømlinjen som går gjennom origo og langs y-aksen er markert med litt tykkere linje for å understreke at her er hastighetsfeltet lik null $\boldsymbol{v}(0,y) = 0$.

Oppgave 4

Vi skal finne volumstrømmen til vektorfeltet

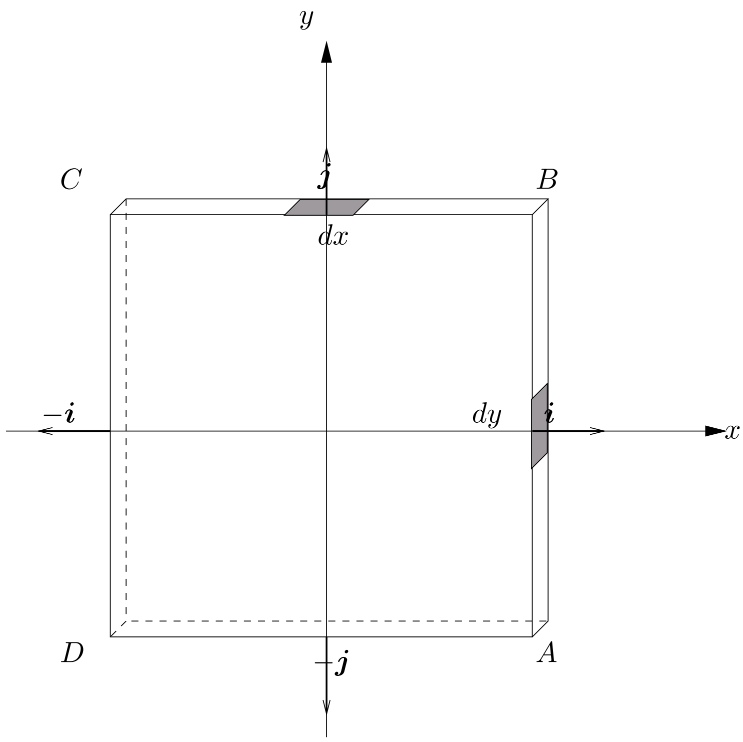
$$\boldsymbol{v} = 3x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

gjennom et rektangel med sentum i origo og sidekanter Δx og Δy (se figur 4.5). Volumstrømmen er definert som

$$\Delta Q = \int_\sigma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$$

der σ er den samlede overflaten til sidekantene og $d\sigma$ er et lite flateelement med normalvektor $\boldsymbol{n}$. Vi deler opp rektangelet i fire deler:

$$\Delta Q = \int_{AB} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{BC} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{CD} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{DA} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$



Figur 4.5: Et rektangel med sidekanter Δx og Δy. Vi antar at tykkelsen er lik en.

AB: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$, $\quad x = \Delta x/2$, $\quad d\sigma = dy\cdot 1$:

$$\int_{AB} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} 3x\,dy = \frac{3\Delta x}{2}\int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy = \frac{3}{2}\Delta x\Delta y.$$

BC: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$, $\quad y = \Delta y/2$, $\quad d\sigma = dx\cdot 1$:

$$\int_{BC} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} y\,dx = \frac{\Delta y}{2}\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx = \frac{1}{2}\Delta x\Delta y.$$

CD: $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}$, $\quad x = -\Delta x/2$, $\quad d\sigma = dy \cdot 1$:

$$\int_{CD} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma \;=\; \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -3x \, dy \;=\; \frac{3\Delta x}{2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \;=\; \frac{3}{2}\Delta x \Delta y.$$

DA: $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}$, $\quad y = -\Delta y/2$, $\quad d\sigma = dx \cdot 1$:

$$\int_{DA} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma \;=\; \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} -y \, dx \;=\; \frac{\Delta y}{2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx \;=\; \frac{1}{2}\Delta x \Delta y.$$

Legger vi sammen disse leddene får vi

$$\Delta Q = 4\Delta x \Delta y.$$

Volumstrømmen per arealenhet blir

$$Q = \frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta y} = 4.$$

Vi kontrollerer ved å beregne divergensen:

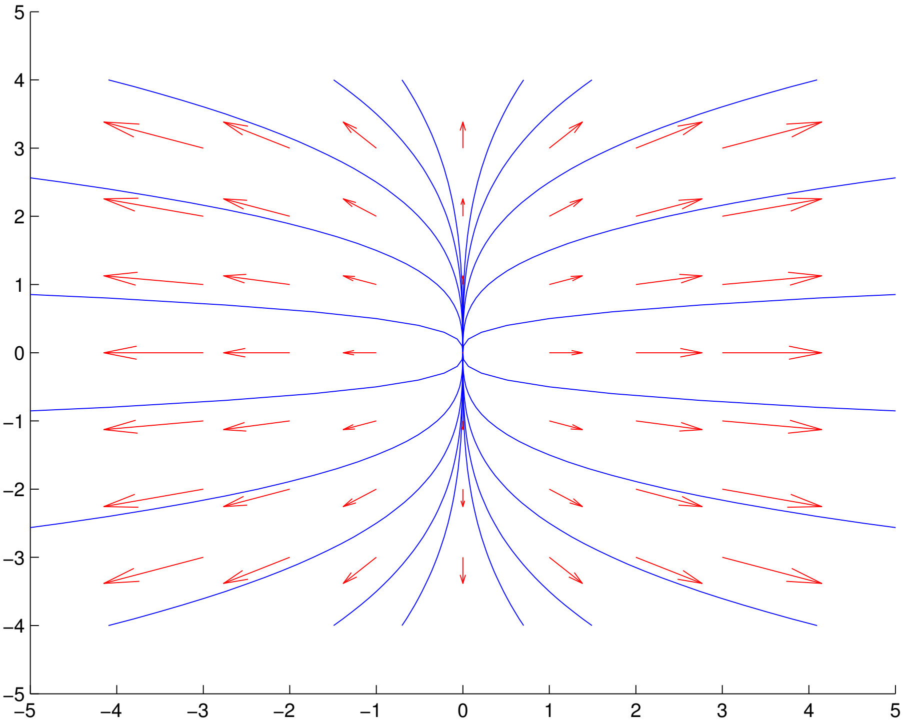
$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 3 + 1 = 4.$$

For at en strømfunksjon skal kunne eksistere må vi ha et to-dimensjonalt divergensfritt felt. Divergensen er her 4, altså eksisterer det ikke noen strømfunksjon for dette feltet, men vi kan alltid finne strømlinjene ved

$$\begin{aligned}
u \, dy &= v \, dx \\
3x \, dy &= y \, dx \\
\frac{dy}{y} &= \frac{dx}{3x} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{3x} \\
\ln|y| &= \frac{1}{3} \ln|x| + A \\
e^{\ln|y|} &= e^{\frac{1}{3}\ln|x| + A} \\
e^{\ln|y|} &= e^{\ln|x|^{\frac{1}{3}}} \cdot e^{A} \\
y &= Cx^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 5

Vi har gitt det to-dimensjonale vektorfeltet $\boldsymbol{v} = ax\boldsymbol{i}$, der a er en konstant.



Figur 4.6: Strømlinjene til feltet $\boldsymbol{v} = 3x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$.

a) Divergens:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = a.$$

b) Vi skal beregne volumstrømmen, $\Delta Q = \int_\sigma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$, gjennom det samme rektangelet som i oppgave 4 (se figur 4.5). Vi deler også her opp integralet i fire deler:

AB: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$, $\quad x = \Delta x/2$, $\quad d\sigma = dy \cdot 1$:

$$\int_{AB} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \;=\; \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} ax\, dy \;=\; \frac{a\Delta x}{2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \Delta y.$$

BC: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$, $\quad y = \Delta y/2$, $\quad d\sigma = dx \cdot 1$:

$$\int_{BC} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \;=\; \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j}\, dx \;=\; 0.$$

CD: $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}$, $\quad x = -\Delta x/2$, $\quad d\sigma = dy \cdot 1$:

$$\int_{CD} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \;=\; \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -ax\, dy \;=\; \frac{a\Delta x}{2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \Delta y.$$

DA: $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}, \quad y = -\Delta y/2, \quad d\sigma = dx \cdot 1$:

$$\int\limits_{DA} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma \;=\; \int\limits_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \boldsymbol{v} \cdot (-\boldsymbol{j})\, dx \;=\; 0.$$

Volumstrømmen blir

$$\Delta Q = a\Delta x \Delta y.$$

c) Sammenlikner vi resultatene fra oppgave a og b får vi

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta y}.$$

Divergensen er altså lik volumstrømmen per arealenhet.

Oppgave 6

Et to-dimensjonalt strømfelt i xy-planet er gitt ved $\boldsymbol{v} = -ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j}$, der a er en konstant.

a) Virvlingen:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -ay & ax & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(0-0) - \boldsymbol{j}(0-0) + \boldsymbol{k}(a+a) = 2a\boldsymbol{k}.$$

b) Sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ langs den lukkede kurven λ er definert ved

$$\Delta C = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$$

der $d\boldsymbol{r}$ er et lite buelement. Vi deler linjeintegralet inn i fire deler (se figur 4.7):

$$\Delta C = \int_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{BC} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{CD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{DA} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

AB: $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}\, dy, \quad x = \Delta x/2$:

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \;=\; \int\limits_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} (-ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{j}\, dy \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \int\limits_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \Delta y.$$

BC: $d\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{i}\, dx, \quad y = \Delta y/2$:

$$\int\limits_{BC} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \;=\; \int\limits_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (-ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j}) \cdot (-\boldsymbol{i})\, dx \;=\; \frac{a}{2}\Delta y \int\limits_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \Delta y.$$

CD: $d\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{j}\, dy, \quad x = -\Delta x/2$:

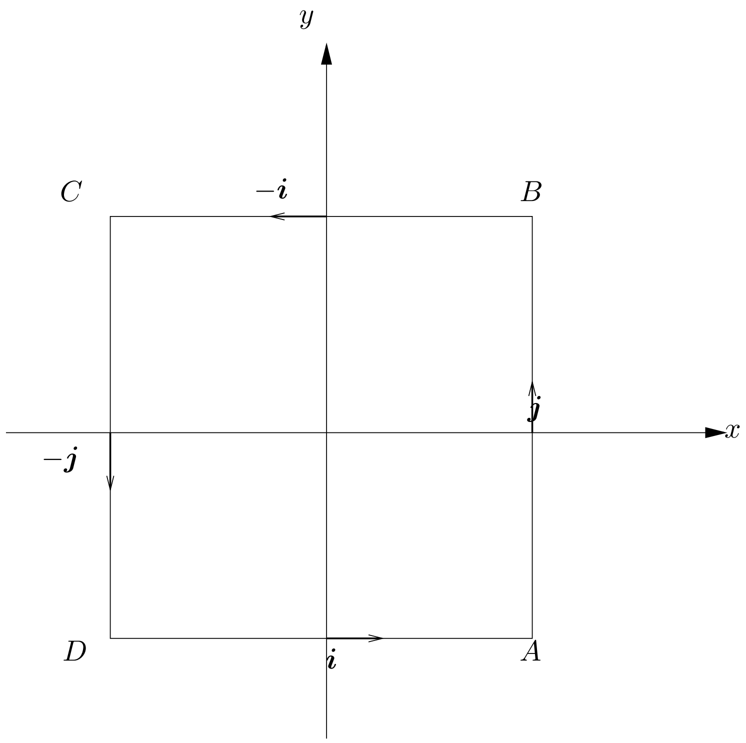
$$\int\limits_{CD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \;=\; \int\limits_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} (-ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j}) \cdot (-\boldsymbol{j})\, dy \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \int\limits_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} dy \;=\; \frac{a}{2}\Delta x \Delta y.$$

DA: $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\,dx, \quad y = -\Delta y/2$:

$$\int_{DA} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (-ay\boldsymbol{i} + ax\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{i}\,dx = \frac{a}{2}\Delta y \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} dx = \frac{a}{2}\Delta x\Delta y.$$

Sammen gir disse leddene sirkulasjonen:

$$\Delta C = 2a\Delta x\Delta y.$$



Figur 4.7: Et rektangel med sidekanter Δx og Δy.

c) Sammenhengen mellom sirkulasjonen og virvlingen:

$$|\nabla\times\boldsymbol{v}| = \frac{\Delta C}{\Delta x\Delta y}.$$

Virvlingens størrelse er altså lik sirkulasjonen per arealenhet.

Oppgave 7

Vi har gitt et to-dimensjonalt strømfelt i xy-planet: $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + v_y(x,y)\boldsymbol{j}$.

a) For at feltet skal være divergensfritt må vi kreve $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{v} &= y + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -y \\ \Rightarrow \quad v_y(x,y) &= -\frac{1}{2}y^2 + f_1(x). \end{aligned}$$

Hvis feltet skal være virvelfritt må $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ xy & v_y(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - x\right)\boldsymbol{k} \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} &= x \\
\Rightarrow \quad v_y(x,y) &= \frac{1}{2}x^2 + f_2(y).
\end{aligned}
$$

For å få en mulig $v_y(x,y)$ må vi velge $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ og $f_2(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C$ hvor C er en vilkårlig konstant, slik at

$$
\begin{aligned}
v_y(x,y) &= \frac{1}{2}\big(x^2 - y^2\big) + C \\
\boldsymbol{v} &= xy\boldsymbol{i} + \big(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C\big)\boldsymbol{j}.
\end{aligned}
$$

b) Strømfunksjonen $\psi(x,y)$ er gitt ved likningene

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= -xy \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= v_y = \frac{1}{2}\big(x^2 - y^2\big) + C.
\end{aligned}
$$

Integrasjon av likningene med hensyn på henholdsvis y og x gir

$$
\begin{aligned}
\psi(x,y) &= -\frac{1}{2}xy^2 + f_1(x) \\
\psi(x,y) &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}xy^2 + Cx + f_2(y).
\end{aligned}
$$

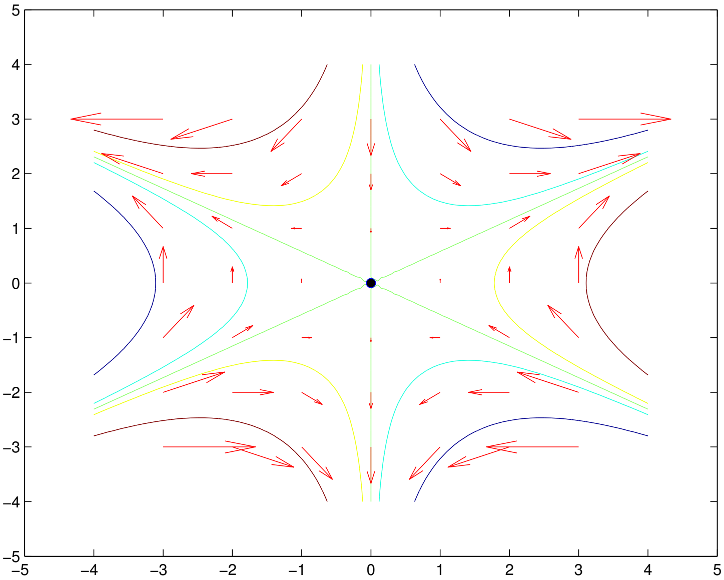
En mulig løsning krever at vi velger $f_1(x) = \frac{1}{6}x^3 + Cx + D$ og $f_2(y) = D$ hvor D er en vilkårlig konstant. Strømfunksjonen blir da

$$
\psi(x,y) = -\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}x^3 + Cx + D.
$$

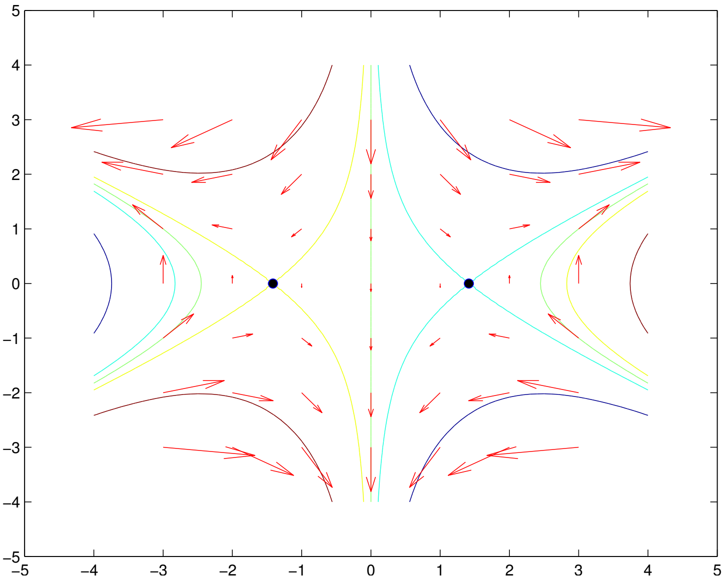
Strømlinjene finner vi ved å sette $\psi = \psi_0 =$ konstant. For eksempel, for $\psi_0 = D$ og $C = 0$ får vi de tre rette linjene

$$
x = 0, \quad y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}}.
$$

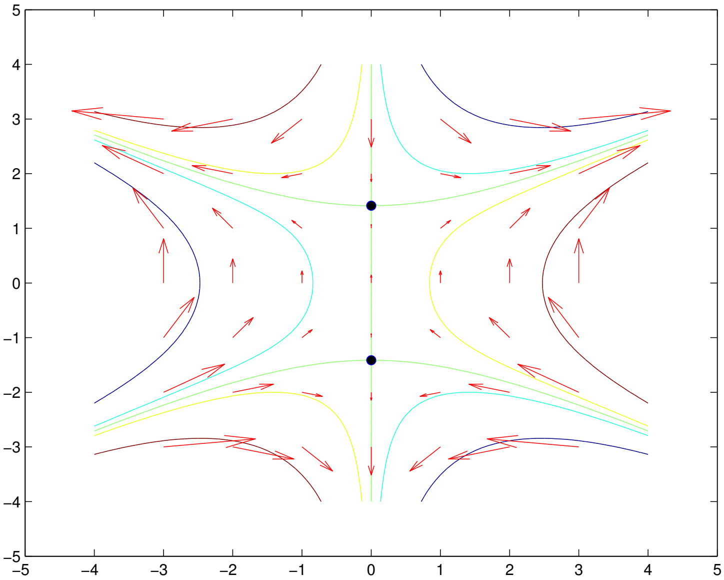
Det er interessant å finne stagnasjonspunktene til vektorfeltet, der hvor $\boldsymbol{v} = 0$. Vi må skille mellom tre kvalitativt forskjellige tilfeller: $C < 0$ gir to stagnasjonspunkt langs x-aksen, $C = 0$ gir ett stagnasjonspunkt i origo, og $C > 0$ gir to stagnasjonspunkt langs y-aksen.



Figur 4.8: Strømlinjene til feltet $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\boldsymbol{j}$. Stagnasjonspunktet er vist med et kulepunkt.



Figur 4.9: Strømlinjene til feltet $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + (\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 1)\boldsymbol{j}$. Stagnasjonspunktene er vist med to kulepunkt.



Figur 4.10: Strømlinjene til feltet $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 1\right)\boldsymbol{j}$. Stagnasjonspunktene er vist med to kulepunkt.

Oppgave 8

For et vilkårlig skalarfelt $\beta = \beta(x, y, z)$ har vi

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

og

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\beta &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial y}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) \\
&= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}\right).
\end{aligned}$$

For partielt deriverte gjelder det generelt at

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial x}, \qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial x}, \qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial y}$$

slik at

$$\nabla\times\nabla\beta = 0.$$

Oppgave 9

a) Stagnasjonsstrøm:

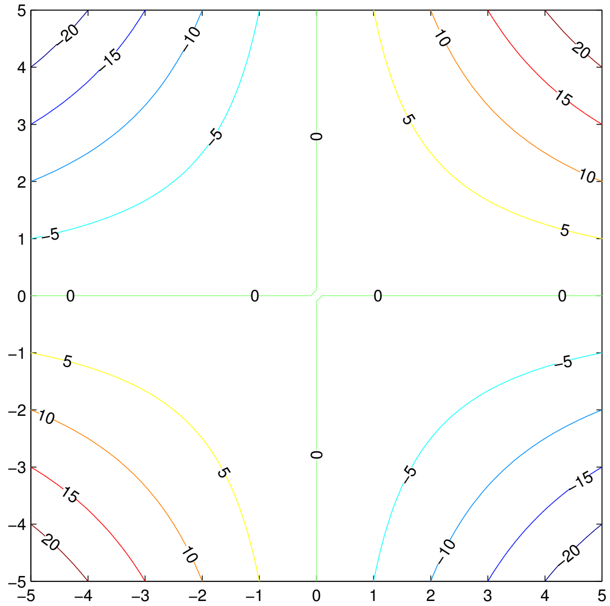
```
[x,y] = meshgrid(-5:.1:5);
psi = x.*y;
[C,h] = contour(x, y, psi);
clabel(C, h)
axis square
```

b) Punktvirvelfelt:

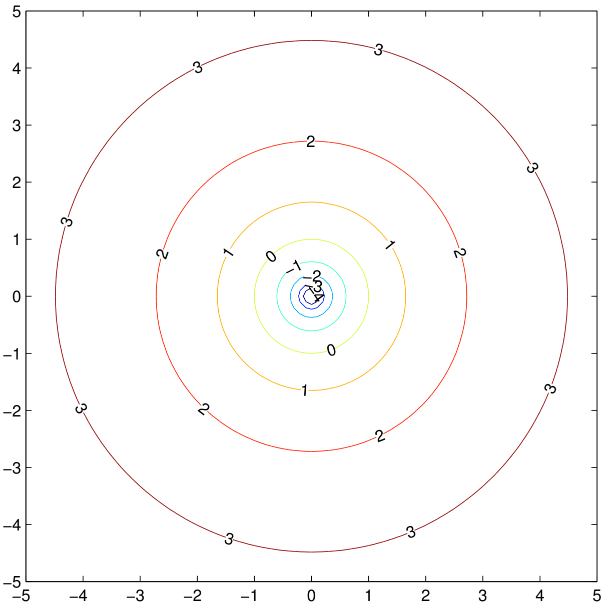
```
[x,y] = meshgrid(-5:.1:5);
psi = 2*log(sqrt(x.^2 + y.^2));
[C,h] = contour(x, y, psi);
clabel(C, h)
axis square
```

c) Dipolfelt:

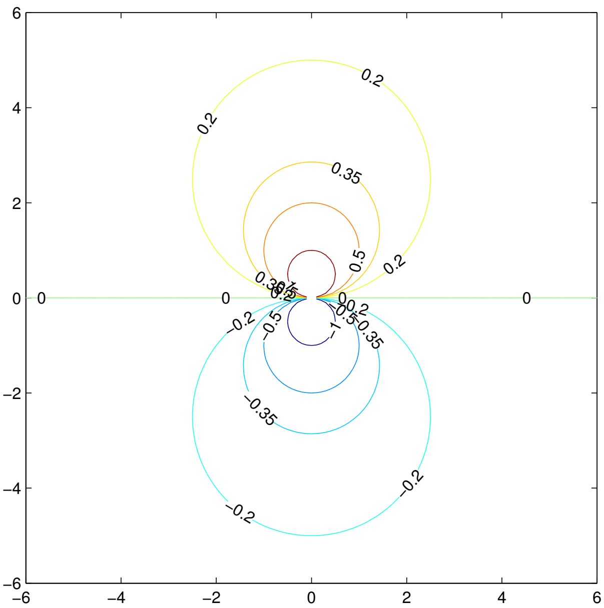
```
[x,y] = meshgrid(-6:.1:6);
psi = y./(x.^2 + y.^2);
[C,h] = contour(x, y, psi, [-1 -.5 -.35 -.2 0 .2 .35 .5 1]);
clabel(C, h)
axis square
```



Figur 4.11: Stagnasjonsstrøm $\psi(x, y) = xy$.



Figur 4.12: Punktvirvelfeltet $\psi(x, y) = 2 \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.



Figur 4.13: Dipolfeltet $\psi(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.