Kapittel 6

Kurve-, flate- og volumintegraler, beregning av trykkraft

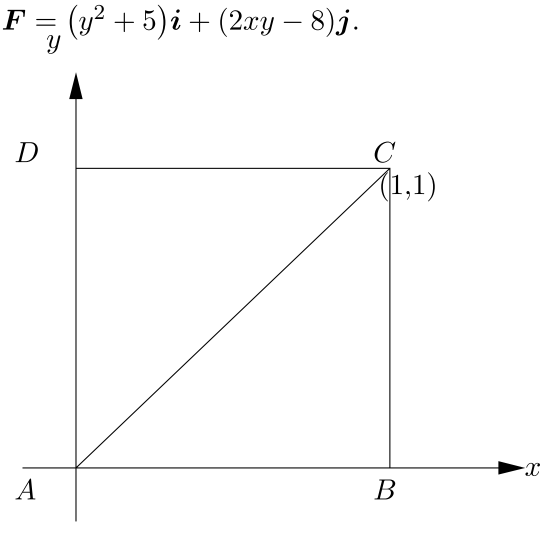
Oppgave 1

Vi skal regne ut kurveintegralet $\int_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$ langs kurven λ: $y = x^3$ når $-1 \le x \le 2$ og $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$. Vi kan parametrisere med x som parameter, $\boldsymbol{r}(x) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = x\boldsymbol{i} + x^3\boldsymbol{j}$, hvor $-1 \le x \le 2$. Da får vi $d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i}+3x^2\boldsymbol{j})\,dx$. Når parametriseringen settes inn i uttrykket for $\boldsymbol{v}$ får vi $\boldsymbol{v} = x^4\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$. Vi setter dette inn i integralet:

$$\int_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-1}^{2} \left(x^4 + 3x^4\right) dx = \frac{132}{5}.$$

Oppgave 2

Et kraftfelt er gitt ved $\boldsymbol{F} = \left(y^2 + 5\right)\boldsymbol{i} + (2xy - 8)\boldsymbol{j}$.



Figur 6.1: Et kvadrat $ABCD$ i xy-planet.

ABC:

$$W = \int\limits_{ABC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{AB} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{BC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

AB: Parametrisering $\boldsymbol{r}(x) = x\boldsymbol{i}$ for $0 \le x \le 1$, da er $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx$ og $y = 0$:

$$\int_{AB} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 5\,dx = 5.$$

BC: Parametrisering $\boldsymbol{r}(y) = \boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ for $0 \le y \le 1$, da er $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}dy$ og $x = 1$:

$$\int_{BC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (2y - 8)\,dy = -7.$$

Arbeidet blir $W = 5 - 7 = -2$.

ADC:

$$W = \int_{ADC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{AD} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{DC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

AD: Parametrisering $\boldsymbol{r}(y) = y\boldsymbol{j}$ for $0 \le y \le 1$, da er $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}dy$ og $x = 0$:

$$\int_{AD} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_0^1 8\,dy = -8.$$

DC: Parametrisering $\boldsymbol{r}(x) = x\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ for $0 \le x \le 1$, da er $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}dx$ og $y = 1$:

$$\int_{DC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 6\,dx = 6.$$

Arbeidet blir $W = -8 + 6 = -2$.

AC: Parametrisering $\boldsymbol{r}(s) = s(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$ for $0 \le s \le 1$, da er $d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})ds$:

$$W = \int_{AC} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (s^2 + 5) + (2s^2 - 8)\,ds = \int_0^1 3s^2 - 3\,ds = -2.$$

Skal kraften kunne skrives som gradienten til et potensial $V = V(x, y)$ må vi ha $\boldsymbol{F} = -\nabla V$ som gir vektorlikningen

$$\left(y^2 + 5\right)\boldsymbol{i} + (2xy - 8)\boldsymbol{j} = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -y^2 - 5 \qquad \Rightarrow \qquad V(x, y) = -xy^2 - 5x + f_1(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2xy + 8 \qquad \Rightarrow \qquad V(x, y) = -xy^2 + 8y + f_2(x).$$

For å få en entydig løsning må vi velge $f_1(y) = 8y + C$ og $f_2(x) = -5x + C$. slik at

$$V(x, y) = -xy^2 - 5x + 8y + C.$$

Vi kan nå regne ut arbeidet ved hjelp av potensialet:

$$W = -\int_{AC} \nabla V \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{AC} dV = V(0, 0) - V(1, 1).$$

- Punktet C: $V(1,1) = -1 - 5 + 8 + C = 2 + C$.
- Punktet A: $V(0,0) = C$.

$$W = V(0,0) - V(1,1) = C - 2 - C = -2.$$

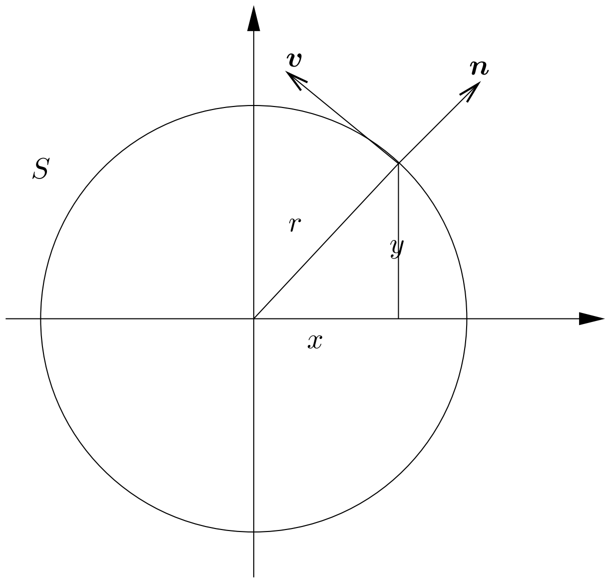
Oppgave 3

En sirkel S i xy-planet er gitt ved $x^2 + y^2 = r^2$. Sirkelen kan betraktes som en ekviskalarkurve til funksjonen $f(x,y) = x^2 + y^2$, en normalvektor til kurven kan skrives som $\nabla f(x,y) = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$ (se figur 6.2). For at normalvektoren skal få lengde lik én må vi normalisere:

$$\boldsymbol{n} = \frac{2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j}.$$

Vi har nå gitt vektorfeltet

$$\boldsymbol{v} = -\frac{Ay}{r^2}\boldsymbol{i} + \frac{Ax}{r^2}\boldsymbol{j}, \quad A > 0.$$



Figur 6.2: En sirkel S i xy-planet.

a) Strømhastigheten er tangensial til sirkelen hvis $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{Ay}{r^2}\frac{x}{r} + \frac{Ax}{r^2}\frac{y}{r} = -\frac{Axy}{r^3} + \frac{Axy}{r^3} = 0.$$

Strømhastighetens størrelse:

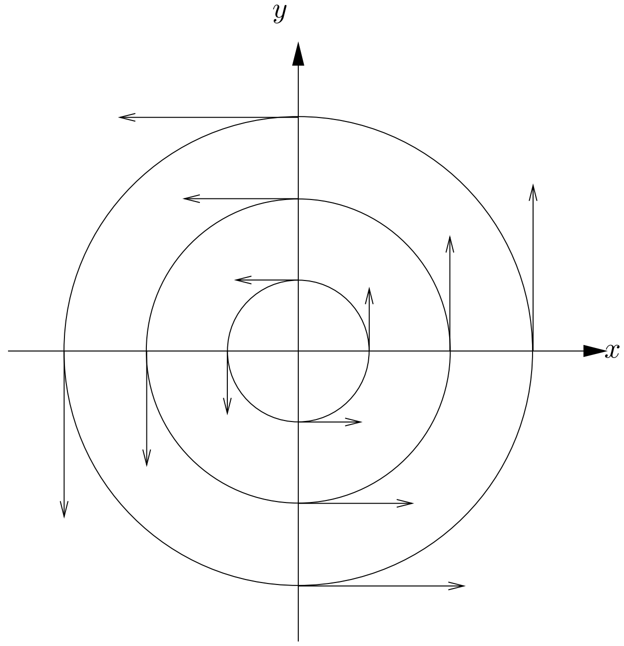
$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\frac{A^2y^2}{r^4} + \frac{A^2x^2}{r^4}} = \sqrt{\frac{A^2(x^2 + y^2)}{r^4}} = \frac{A}{r}.$$

(Langs sirkelen er r konstant.)

b) For å vise at strømfunksjonen eksisterer kan vi enten regne den ut, eller vi kan sjekke at $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Vis at den er divergensfri!

Siden $\boldsymbol{v}$ er divergensfri og er todimensjonal i xy-planet så vet vi at det eksisterer en strømfunksjon $\psi(x, y)$ som oppfyller likningene $v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ og $v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Vi løser disse og finner $\psi(x, y) = A \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \alpha$ hvor α er en vilkårlig konstant.

Strømlinjene framkommer som ekviskalarkurver for strømfunksjonen, $\psi(x, y) =$ konstant. Disse kan skrives som $x^2 + y^2 =$ konstant, og vi ser at de er sirkler med sentrum i origo.



Figur 6.3: Strømlinjene til $\boldsymbol{v} = -\dfrac{Ay}{r^2}\boldsymbol{i} + \dfrac{Ax}{r^2}\boldsymbol{j}$ er sirkler med sentrum i origo

c) Langs sirkelen S er $\boldsymbol{v}$ og $d\boldsymbol{r}$ parallelle. Vinkelen mellom $\boldsymbol{v}$ og $d\boldsymbol{r}$ er 0, og vi husker at $\cos 0 = 1$. Da blir skalarproduktet $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{v}|\,|d\boldsymbol{r}|$ der $|\boldsymbol{v}| = A/r$ og $|d\boldsymbol{r}| = ds$. Linjeintegralet blir nå

$$C = \oint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{A}{r} \oint_S ds = \frac{A}{r} 2\pi r = 2\pi A.$$

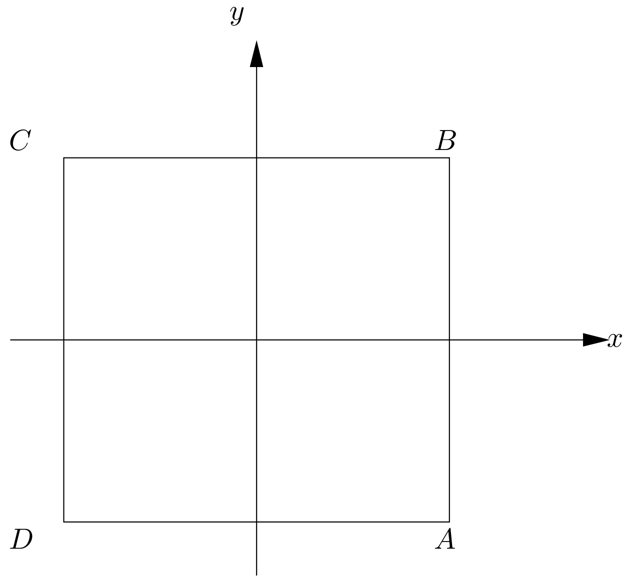
C kalles for sirkulasjonen.

d) Linjeintegralet rundt et kvadrat $ABCD$ (se figur 6.4) kan deles opp i fire deler:

$$C = \oint\limits_{ABCD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{BC} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{CD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{DA} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Langs linjestykket fra A til B kan vi velge parametriseringen $\boldsymbol{r}(y) = \boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ for $-1 \leq y \leq 1$, og vi har at $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}\,dy$ og $x = 1$:

$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{A}{1 + y^2}\,dy = \Big[A \arctan y\Big]_{-1}^{1} = \frac{A\pi}{4} + \frac{A\pi}{4} = \frac{A\pi}{2}.$$



Figur 6.4: Et kvadrat med sentrum i origo og sidekanter lik 2.

Tilsvarende utregning langs de andre sidekantene gir

$$\int_{AB} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{BC} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{CD} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{DA} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Sirkulasjonen blir altså

$$C = 4\,\frac{A\pi}{2} = 2\pi A.$$

Oppgave 4

a) Den hydrostatiske trykkformelen er gitt ved $p = p_0 + \rho g z$. Trykkraften kan skrives som

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -\int_\sigma p\boldsymbol{n}\,d\sigma \\ &= -\int_{\sigma_{\text{topp}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma - \int_{\sigma_{\text{bunn}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma - \int_{\sigma_{\text{side}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma. \end{aligned}$$

På toppflaten er $z = d$ og $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$:

$$-\int_{\sigma_{\text{topp}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma = (p_0 + \rho g d)\boldsymbol{k}\int_{\sigma_{\text{topp}}} d\sigma = (p_0 + \rho g d)\pi a^2 \boldsymbol{k}.$$

På bunnflaten er $z = d + l$ og $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$:

$$-\int_{\sigma_{\text{bunn}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma = -\big(p_0 + \rho g(d+l)\big)\boldsymbol{k}\int_{\sigma_{\text{bunn}}} d\sigma = -\big(p_0 + \rho g(d+l)\big)\pi a^2 \boldsymbol{k}.$$

På grunn av symmetri blir $\int_{\sigma_{\text{side}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma = 0$, dette kan for øvrig regnes ut direkte ved å parametrisere sideflaten:

$$\boldsymbol{r}(\theta, z) = a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad \text{for} \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad \text{og} \quad d \le z \le d + l$$

Da får vi

$$\boldsymbol{n}d\sigma = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} d\theta dz = (a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j})d\theta dz$$

Kraften på siden blir da

$$-\int_{\sigma_{\text{side}}} p\boldsymbol{n}\,d\sigma = -\int_d^{d+l}\int_0^{2\pi}(p_0 + \rho g z)(a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j})d\theta dz = 0$$

Den total trykkraften blir nå

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \Big[(p_0 + \rho g d)\pi a^2 - \big(p_0 + \rho g(d+l)\big)\pi a^2\Big]\boldsymbol{k} \\ &= -\rho g l \pi a^2 \boldsymbol{k} \\ &= -Mg\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

der $M = \rho l \pi a^2$ er massen til væsken fortrengt av sylinderen.

b) Oppgaveteksten ber oss om å gjette, da kan vi nøye oss med å bruke Arkimedes prinsipp som sier at trykkraften (oppdriften) er lik vekten av den fortrengte væsken:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -Mg\boldsymbol{k}, \quad M = \rho\frac{4}{3}\pi a^3 \\ &= -\frac{4}{3}\rho g \pi a^3 \boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Svaret kunne også ha blitt regnet ut direkte som et flateintegral ved å anvende kulekoordinater, eller det kan enda lettere regnes ut indirekte ved å anvende Gauss sats (da er det tilstrekkelilg å huske formelen for volumet av ei kule). For å regne det ut direkte som et flateintegral kan vi parametrisere

$$\boldsymbol{r}(\theta, \varphi) = a\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + a\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + (a\cos\theta + d)\boldsymbol{k} \qquad \text{for} \quad 0 \le \theta \le \pi \quad \text{og} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

hvor vi har antatt at sentrum i kula ligger posisjon $z = d$. Vi får da

$$\boldsymbol{n}d\sigma = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} d\theta d\varphi = a^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k})d\theta d\varphi$$

Trykkraften er

$$\begin{aligned} -\int_\sigma p\boldsymbol{n}\,d\sigma &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(p_0 + \rho g(d + a\cos\theta))a^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k})d\theta d\varphi \\ &= -\frac{4}{3}\rho g \pi a^3 \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

Oppgave 5

a)

$$\begin{aligned}
\iiint_\tau 3xye^z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}} 3xye^z\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^1\int_0^2 \left[\frac{3}{2}x^2ye^z\right]_0^{1/2} dy\,dz \\
&= \int_0^1\int_0^2 \frac{3}{8}ye^z\,dy\,dz \\
&= \int_0^1 \left[\frac{3}{16}y^2e^z\right]_0^2 dz \\
&= \int_0^1 \frac{3}{4}e^z\,dz = \frac{3}{4}(e-1).
\end{aligned}$$

b)

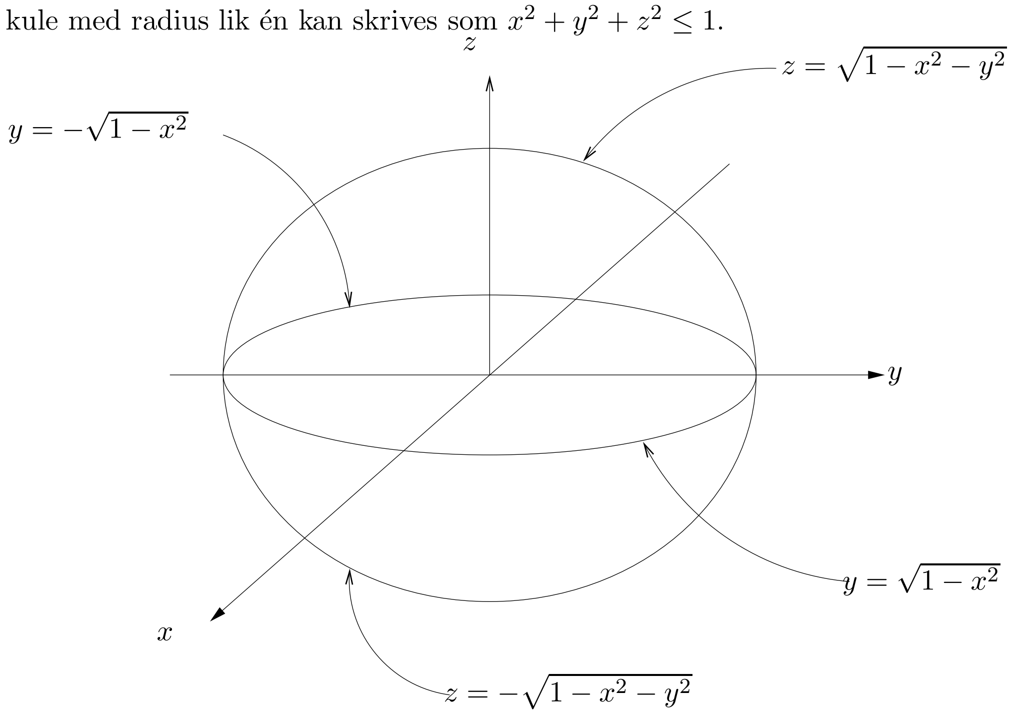
$$\begin{aligned}
\iiint_\tau 3xye^z\,dx\,dy\,dz &= \int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^1 3xye^z\,dz\,dx\,dy \\
&= \int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[3xye^z\right]_0^1 dx\,dy \\
&= \int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}} 3xy(e-1)\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{3}{2}x^2y(e-1)\right]_0^{1/2} dy \\
&= \int_0^2 \frac{3}{8}y(e-1)\,dy \\
&= \left[\frac{3}{16}y^2(e-1)\right]_0^2 = \frac{3}{4}(e-1).
\end{aligned}$$

Oppgave 6

$$\int_0^1\int_0^x\int_0^y \left(x^2+3xy-z^2\right)dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x \left[x^2z+3xyz-\frac{1}{3}z^3\right]_0^y dy\,dx$$
$$= \int_0^1\int_0^x \left(x^2y+3xy^2-\frac{1}{3}y^3\right)dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2+xy^3-\frac{1}{12}y^4\right]_0^x dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4+x^4-\frac{1}{12}x^4\right)dx$$
$$= \frac{17}{12}\int_0^1 x^4\,dx$$
$$= \frac{17}{60}.$$

Oppgave 7

En kule med radius lik én kan skrives som $x^2+y^2+z^2\le 1$.



Figur 6.5: En kule med radius lik en.

a)

$$\begin{aligned} -1 \leq & \quad x \quad \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq & \quad y \quad \leq \sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq & \quad z \quad \leq \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

b) Vi har gitt volumet τ: $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_\tau dx\,dy\,dz \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big[z\Big]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy\,dx \\ &= 2\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx. \end{aligned}$$

Det innerste integralet kan vi uttrykke som

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\,dy, \qquad a = \sqrt{1-x^2}.$$

Dette integralet kan vi finne løsningen til i en integraltabell:

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{y}{a}\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a}\right]_{-a}^{a} \\ &= 0 + \frac{a^2}{2}\arcsin 1 - 0 - \frac{a^2}{2}\arcsin(-1) \\ &= \frac{a^2\pi}{4} + \frac{a^2\pi}{4} = \frac{a^2\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vi setter dette resultatet tilbake i volumintegralet:

$$\begin{aligned} V &= 2\int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}a^2\,dx \\ &= \pi\int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) dx \\ &= \pi\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} \\ &= \pi\left[1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right] = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$