Kapittel 7

Integralsatser: Green, Stokes og Gauss

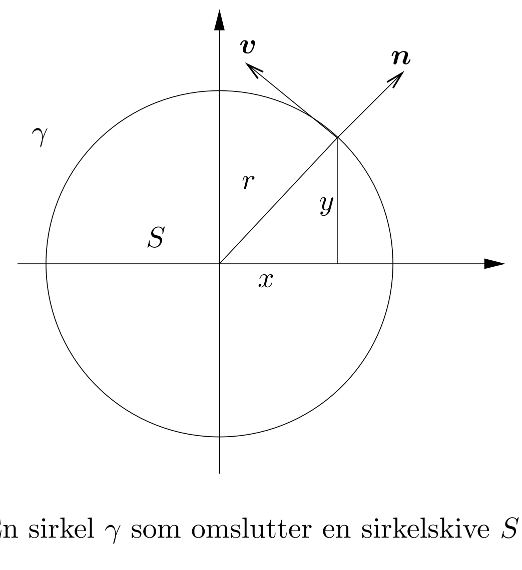
Oppgave 1

Vi har gitt strømfeltet $\boldsymbol{v} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$ der ω er en konstant.

a) Strømfarten:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\omega^2 y^2 + \omega^2 x^2} = \omega r, \quad r = x^2 + y^2.$$

Langs sirkelen $r^2 = x^2 + y^2$ er r konstant og dermed også $|\boldsymbol{v}|$ konstant.



Figur 7.1: En sirkel γ som omslutter en sirkelskive S i xy-planet.

Sirkulasjonen er gitt ved likningen

$$C = \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Fra oppgave 3, kapittel 6, har vi enhetsnormalen til en sirkel

$$\boldsymbol{n} = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j}$$

og følgelig

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = -\frac{\omega yx}{r} + \frac{\omega xy}{r} = 0.$$

Strømfeltet $\boldsymbol{v}$ er altså tangensialt til sirkelen γ. Denne opplysningen kan vi bruke ved beregning av sirkulasjonen:

$$\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \omega r\, ds$$

der ds er et lite element av sirkelen γ. Sirkulasjonen blir

$$C = \oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi r} \omega r\, ds = \omega r \int_0^{2\pi r} ds = \omega r\, 2\pi r = 2\pi\omega r^2.$$

Alternativt kan vi parametrisere sirkelen $\boldsymbol{r}(\theta) = \boldsymbol{i}r\cos\theta + \boldsymbol{j}r\sin\theta$ for $0 \le \theta < 2\pi$. Vi får da $d\boldsymbol{r} = r(-\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta)d\theta$ og $\boldsymbol{v} = \omega r(-\boldsymbol{i}\sin\theta + \boldsymbol{j}\cos\theta)$, og følgelig

$$C = \oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \omega r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = \omega r^2\, 2\pi.$$

b) Vi regner først ut virvlingen:

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\boldsymbol{k}.$$

Integralet av virvlingen over sirkelflaten:

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{v}\, d\sigma = \int_S 2\omega\boldsymbol{k}\, d\sigma = 2\omega\boldsymbol{k}\int_S d\sigma = 2\omega\pi r^2\boldsymbol{k}.$$

Greens sats:

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$$

der $\boldsymbol{n}$ er normalvektoren til sirkelflaten S (ikke sirkelbuen γ). For sirkelflaten S har vi $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ som er en konstant vektor som eventuelt kan tas utenfor integralet.

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{k}\, d\sigma = 2\pi\omega r^2.$$

c) Siden $|\boldsymbol{v}|$ er konstant for en gitt r, og $\boldsymbol{v}$ er tangent til sirkler med radius r, har vi ved symmetri

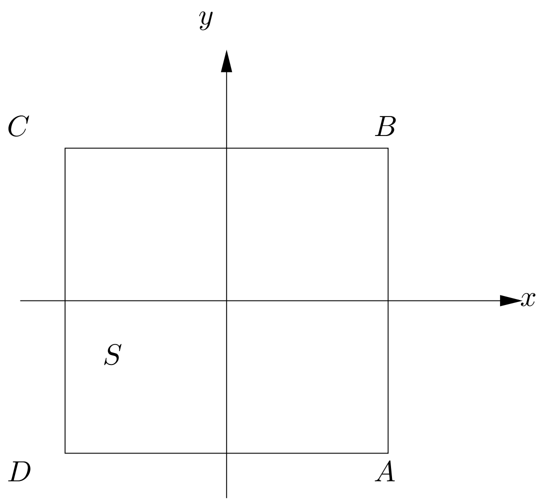
$$\int\limits_{AB} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{BC} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{CD} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{DA} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Sirkulasjonen er derfor gitt ved

$$C = \oint\limits_{ABCD} \boldsymbol{c}\cdot d\boldsymbol{r} = 4\int\limits_{AB} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Langs linjestykket AB er $x = \Delta x/2$, $d\boldsymbol{r} = dy\boldsymbol{j}$ og $-\Delta y/2 \le y \le \Delta y/2$:

$$C = 4\int\limits_{AB} \omega x\, dy = 4\omega\frac{\Delta x}{2}\int\limits_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} dy = 2\omega\Delta x\Delta y.$$



Figur 7.2: Et kvadrat med sentrum i origo og sidekanter $\Delta x = \Delta y$.

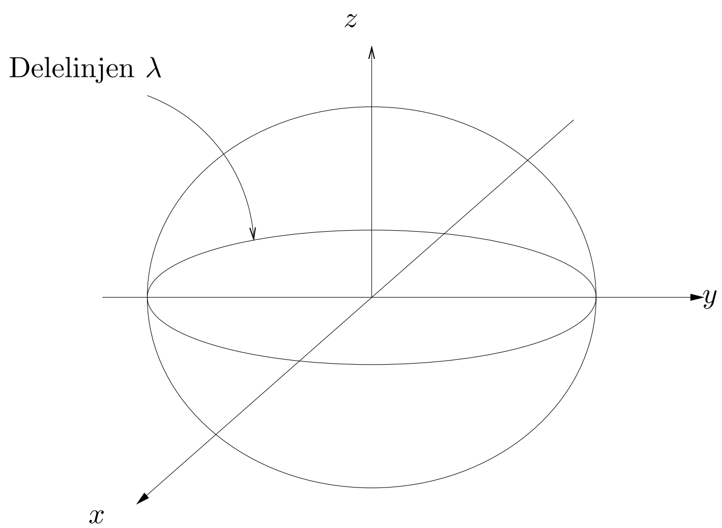
Greens sats:

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \oint_{ABCD} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$$

hvor S nå betegner firkantskiven avgrenset av $ABCD$. Den venstre siden over kan nå regnes ut

$$= \int_S 2\omega \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\, d\sigma = 2\omega \int_S d\sigma = 2\omega \Delta x \Delta y.$$

Oppgave 2



a) Stokes' sats:

$$\int_\sigma (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Stokes' sats sier at summen av virvlingsvektoren for hver halvkule er lik sirkulasjonen rundt λ. Siden halvkulene har samme form og volum er lengden av sirkulasjonen lik, men fortegnet ulikt. For hver $\boldsymbol{n}_1$ på den øvre halvkulen har vi en $\boldsymbol{n}_2$ på den nedre halvkulen slik at $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$. Summen av sirkulasjonen av de to halvkulene blir derfor lik null.

b) Radius av jordkloden: 6370 km, atmosfæretykkelsen: 10 km. For en kule med radius 1 meter har vi en atmosfærestørrelse på $\frac{10}{6370}$ meter $\approx$ 1 mm. Vi har en tilnærmet to-dimensjonal situasjon og det vil derfor være rimelig å bruke modellen fra oppgave a).

Oppgave 3

Vi har gitt et tre-dimensjonalt strømfelt $\boldsymbol{v} = \alpha(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$ der α er en konstant.

a) Enhets normalvektor er $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ hvor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ og $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vi ser at $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{r}$. Da får vi

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \alpha r \int_\sigma d\sigma = (\alpha r)(4\pi r^2) = 4\alpha\pi r^3.$$

Alternativt bruker vi Gauss' sats:

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\tau = \int_\tau 3\alpha\, d\tau = 3\alpha \int_\tau d\tau$$

der τ er volumet innenfor kuleflaten.

$$Q = 3\alpha \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\alpha\pi r^3.$$

b) Vi antar nå at σ er en vilkårlig flate. Volumstrømmen blir

$$Q = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\tau = 3\alpha\tau$$

der τ er volumet σ omslutter.

Oppgave 4

En vektor med konstant lengde og retning kan skrives som

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$$

der a, b og c er konstanter. Flateintegralet av normalkomponenten av $\boldsymbol{A}$ over en lukket, sammenhengende flate σ kan vi beregne ved å bruke Gauss' sats:

$$\int_\sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, d\tau.$$

Divergensen til $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

og flateintegralet blir følgelig

$$\int_\sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0.$$

Oppgave 5

Flateintegralet av en skalar β ganger enhetsnormalvektor til en lukket, sammenhengende flate σ kan vi beregne ved å bruke Gauss' sats:

$$\int_\sigma \beta \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla\beta\, d\tau.$$

Gradientvektoren $\nabla\beta$:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k} = 0$$

og flateintegralet blir derfor

$$\int_\sigma \beta \boldsymbol{n}\, d\sigma = 0.$$

Oppgave 6

a) Vi tenker oss at vi deler opp volumet τ i små delvolumer τ_i med overflate σ_i. Trykket på et slikt volum er $-p\boldsymbol{n}_i$, der $\boldsymbol{n}_i$ er flatenormalen til σ_i og minustegnet angir at trykket er rettet inn mot flaten. Trykkraften blir nå $-p\boldsymbol{n}_i\, d\sigma_i$ og hvis vi summerer opp for alle delvolumene og lar $i \to \infty$ (og $d\sigma_i \to 0$) blir den totale trykkraften:

$$\boldsymbol{F} = -\int_\sigma p\boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

b) Vi bruker Gauss' sats på trykkraften:

$$\boldsymbol{F} = -\int_\sigma p\boldsymbol{n}\, d\sigma = -\int_\tau \nabla p\, d\tau.$$

Trykket er gitt ved den hydrostatiske trykkformelen $p = p_0 + \rho g z$ og gradientvektoren til p blir $\nabla p = \boldsymbol{k}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho g\boldsymbol{k}$. Vi setter dette inn i uttrykket for trykkraften:

$$\boldsymbol{F} = \rho g\boldsymbol{k}\int_\tau d\tau = \rho g\tau\boldsymbol{k} = mg\boldsymbol{k}$$

der $m = \rho\tau$ er massen av den merkede væsken.

c) Oppdriftskraften (trykkraften $\boldsymbol{F}$) avhenger kun av tettheten til væsken (ρ) og volumet av den fortrengte væsken (τ), ikke av egenskapene til objektet som fortrenger væsken. Trykkraften blir altså uforandret.

Oppgave 7

Et kraftfelt er gitt ved

$$\boldsymbol{F} = (y^2+5)\boldsymbol{i} + (2xy-8)\boldsymbol{j}.$$

a) Kraften må være virvelfri:

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+5 & 2xy-8 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Kraftpotensialet, V, kan vi finne fra $\boldsymbol{F} = -\nabla V$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -(y^2+5) \qquad \Rightarrow \qquad V(x,y) = -xy^2 - 5x + f_1(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -(2xy-8) \qquad \Rightarrow \qquad V(x,y) = -xy^2 + 8y + f_2(x).$$

For å få en entydig $V(x,y)$ må vi velge $f_1(y) = 8y + C$ og $f_2(x) = -5x + C$ slik at

$$V(x,y) = -xy^2 - 5x + 8y.$$

b) Arbeidet er gitt ved

$$W = \int_\lambda \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_\lambda (y^2+5)\,dx + \int_\lambda (2xy-8)\,dy.$$

$\lambda = OAB$**:**

$$W = \int\limits_{OAB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{OA} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{AB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Langs linjen OA er $y = 0$ og $dy = 0$ og langs linjen AB er $x = 1$ og $dx = 0$. Dette gir

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 5\,dx + \int_0^1 (2y-8)\,dy \\ &= 5 + (1-8) \\ &= -2. \end{aligned}$$

$\lambda = OB$**:** Langs linjen fra origo til B er $x = y$ og $dx = dy$ og arbeidet blir

$$\begin{aligned} W &= \int_{OB} (x^2 + 5 + 2x^2 - 8)\,dx \\ &= \int_0^1 (3x^2-3)\,dx \\ &= 1 - 3 \\ &= -2. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} W &= \int_{OB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{OB} \nabla V\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{OB} dV \\ &= -V(1,1) + V(0,0) = 1 + 5 - 8 - C + C = -2. \end{aligned}$$

Arbeidet for en kraft som kan avledes av et kraftpotensiale er uavhengig av veien og kun avhengig av verdien til potensialet i endepunktene.

d) Vektorfluksen til $\boldsymbol{F}$ kan skrives som

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_{OA} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{BC} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma + \int_{CO} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

$$\begin{aligned}
\int_{OA} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma &= \int_0^1 8\,dx = 8\\
\int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma &= \int_0^1 (y^2+5)\,dy = \frac{16}{3}\\
\int_{BC} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma &= \int_0^1 (2x-8)\,dx = -7\\
\int_{CO} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma &= -\int_0^1 (y^2+5)\,dy = -\frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

Vektorfluksen blir derfor

$$Q = 8 + \frac{16}{3} - 7 - \frac{16}{3} = 1.$$

La oss bruke Gauss' sats på vektorfluksen:

$$\int_\sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,d\tau.$$

Divergensen til $\boldsymbol{F}$ er $\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0 + 2x$ og vektorfluksen blir

$$Q = \int_\tau 2x\,d\tau.$$

τ er nå en kube med sidekanter lik 1:

$$\begin{aligned}
Q &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 2x\,dx\,dy\,dz\\
&= \int_0^1\int_0^1 \Big[x^2\Big]_0^1\,dy\,dz\\
&= \int_0^1\int_0^1 dy\,dz\\
&= \int_0^1 dz\\
&= 1.
\end{aligned}$$

e) Sirkulasjonen rundt kurven λ kan skrives som

$$C = \int_\lambda \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{OA} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{BC} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{CO} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

$$\begin{aligned}
\int_{OA} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 5\,dx = 5\\
\int_{AB} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 (2y-8)\,dy = -7\\
\int_{BC} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= -\int_0^1 6\,dx = -6\\
\int_{CO} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 8\,dy = 8.
\end{aligned}$$

Sirkulasjonene blir derfor

$$C = 5 - 7 - 6 + 8 = 0.$$

Vi skal nå beregne sirkulasjon ved hjelp av Stokes' sats:

$$\int_\lambda \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\sigma (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

La oss regne ut virvlingen:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ y^2 + 5 & 2xy - 8 & 0 \end{vmatrix} = (2y - 2y)\boldsymbol{k} = 0.$$

Siden virvlingen er null blir også sirkulasjonen lik null.