Kapittel 8

Polarkoordinater

Oppgave 1

Vi har gitt skalarfeltet $\beta(x,y) = xy$ i kartesiske koordinater.

a) For polarkoordinater (r,θ) og kartesiske koordinater (x,y) har vi sammenhengen $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. Innsatt i $\beta = xy$:

$$\beta = r^2 \cos\theta \sin\theta.$$

b) Gradientvektoren i kartesiske koordinater:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}. \tag{8.1}$$

Gradientvektoren i polare koordinater:

$$\begin{aligned}
\nabla\beta &= \frac{\partial\beta}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta \\
&= 2r\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{i}_r + r(-\sin\theta\sin\theta + \cos\theta\cos\theta)\boldsymbol{i}_\theta \\
&= 2r\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{i}_r + r\big(\cos^2\theta - \sin^2\theta\big)\boldsymbol{i}_\theta. \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

For å vise at (8.1) og (8.2) er samme vektor kan vi gjøre om (8.1) til polare koordinater. Vi trenger da sammenhengen mellom enhetsvektorene i kartesiske og polare koordinater:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i} &= \cos\theta\boldsymbol{i}_r - \sin\theta\boldsymbol{i}_\theta \\
\boldsymbol{j} &= \sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos\theta\boldsymbol{i}_\theta.
\end{aligned}$$

Vi setter dette inn i likning 8.1:

$$\begin{aligned}
\nabla\beta &= y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} \\
&= r\sin\theta(\cos\theta\boldsymbol{i}_r - \sin\theta\boldsymbol{i}_\theta) + r\cos\theta(\sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos\theta\boldsymbol{i}_\theta) \\
&= 2r\cos\theta\sin\theta\boldsymbol{i}_r + r\big(\cos^2\theta - \sin^2\theta\big)\boldsymbol{i}_\theta.
\end{aligned}$$

c) Divergensen til $\nabla\beta$ i kartesiske koordianter:

$$\nabla\cdot\nabla\beta = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

Divergensen til $\nabla\beta$ i polare koordinater:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla\beta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[r(2r\cos\theta\sin\theta)\Big] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(r\cos^2\theta - r\sin^2\theta\Big)\\
&= \frac{1}{r}4r\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{r}\big(2r\cos\theta(-\sin\theta) - 2r\sin\theta\cos\theta\big)\\
&= 4\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

d) Virvlingen til $\nabla\beta$ i kartesiske koordinater:

$$
\nabla \times \nabla\beta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0.
$$

Virvlingen til $\nabla\beta$ i polare koordinater:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \nabla\beta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[r\big(r\cos^2\theta - r\sin^2\theta\big)\Big]\boldsymbol{k} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(2r\cos\theta\sin\theta)\boldsymbol{k}\\
&= \frac{1}{r}\big(2r\cos^2\theta - 2r\sin^2\theta\big)\boldsymbol{k} - \frac{1}{r}2r\big(-\sin^2\theta + \cos^2\theta\big)\boldsymbol{k}\\
&= \big(2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta + 2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta\big)\boldsymbol{k}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

Vi har gitt skalarfeltet $\beta(r) = \dfrac{A}{r}$ der $r = \big(x^2+y^2+z^2\big)^{1/2}$ og A er en konstant.

a) Gradientvektoren $\nabla\beta$ i kartesiske koordinater:

$$
\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}.
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\beta}{\partial x} &= \frac{\partial\beta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\\
&= -\frac{A}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\\
&= -\frac{A}{r^2}\frac{1}{2}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\\
&= -Ax\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-1}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{1}{2}}\\
&= -Ax\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Uttrykkene for $\dfrac{\partial\beta}{\partial y}$ og $\dfrac{\partial\beta}{\partial z}$ kan regnes ut på tilsvarende måte slik at

$$
\begin{aligned}
\nabla\beta &= -A\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}).\\
\Bigg(&= -Ar^{-3}\boldsymbol{r} = -\frac{A}{r^3}r\boldsymbol{i}_r = -\frac{A}{r^2}\boldsymbol{i}_r\Bigg)
\end{aligned}
$$

Gradientvektoren $\nabla\beta$ i sfæriske polarkoordinater:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}_\varphi = -\frac{A}{r^2}\boldsymbol{i}_r.$$

b) Divergensen til $\nabla\beta$ i kartesiske koordinater:

$$\nabla\cdot\nabla\beta = \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big[-Ax\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big]\\ &= -A\Big[\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}} + x\Big(-\frac{3}{2}\Big)\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\Big]\\ &= A\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big[3x^2\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-1} - 1\Big].\end{aligned}$$

Tilsvarende utregning kan gjøres for $\dfrac{\partial^2\beta}{\partial y^2}$ og $\dfrac{\partial^2\beta}{\partial z^2}$ slik at

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla\beta &= A\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\Big[3\big(x^2+y^2+z^2\big)\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-1} - 3\Big]\\ &= A\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\big[3-3\big]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Divergensen til $\nabla\beta$ i sfæriske polarkoordinater:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla\beta &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big[r^2\Big(-\frac{A}{r^2}\Big)\Big] + 0 + 0\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-A)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Oppgave 3

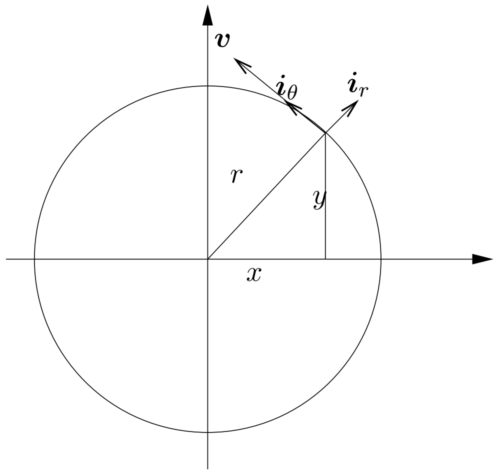
Vi har gitt et hastighetsfelt i kartesiske koordinater:

$$\boldsymbol{v} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}.$$

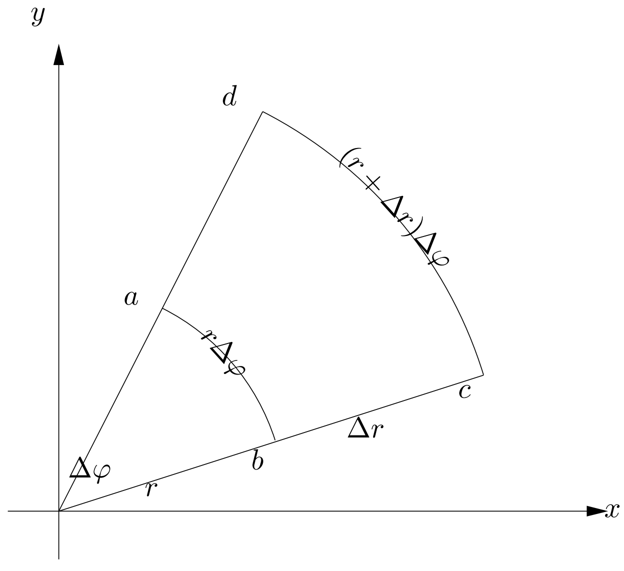
a) For å finne uttrykket for $\boldsymbol{v}$ i polarkoordinater må vi bruke likningene:

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta\\ y &= r\sin\theta\\ \boldsymbol{i} &= \cos\theta\boldsymbol{i}_r - \sin\theta\boldsymbol{i}_\theta\\ \boldsymbol{j} &= \sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos\theta\boldsymbol{i}_\theta.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \omega r \sin\theta(\cos\theta \boldsymbol{i}_r - \sin\theta \boldsymbol{i}_\theta) + \omega r \cos\theta(\sin\theta \boldsymbol{i}_r + \cos\theta \boldsymbol{i}_\theta) \\
&= \omega r(-\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta)\boldsymbol{i}_r + \omega r(\sin\theta\sin\theta + \cos\theta\cos\theta)\boldsymbol{i}_\theta \\
&= \omega r \boldsymbol{i}_\theta.
\end{aligned}
$$



$$
\boldsymbol{v} = \omega \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} = \omega \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega y \boldsymbol{i} + \omega x \boldsymbol{j}.
$$



b) Sirkulasjonen kan deles opp i fire deler:

$$
C = \oint_{abcd} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{ab} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{bc} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{cd} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{da} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.
$$

- ab: $\boldsymbol{dr}$ er her et lite bueelement på sirkelen med radius r og har retning $-\boldsymbol{i}_\theta$. Langs ab er $\boldsymbol{v}$ konstant lik ωr i $\boldsymbol{i}_\theta$-retning. $\boldsymbol{dr}$ og $\boldsymbol{v}$ er altså parallelle.

$$\int_{ab} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = -\omega r \cdot r\Delta\varphi \quad \text{(lengden av } \boldsymbol{v} \cdot \text{lengden av } ab\text{)}.$$

- bc: $\boldsymbol{dr}$ peker nå i retning $\boldsymbol{i}_r$ og $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \omega r\boldsymbol{i}_\theta \cdot dr\boldsymbol{i}_r = 0$.
- cd: Her kan vi benytte oss av et tilsvarende argument som for linjestykket ab, men nå er $\boldsymbol{dr}$ et buelement på en sirkel med radius $r{+}\Delta r$ og peker i positiv $\boldsymbol{i}_\theta$-retning:

$$\int_{cd} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \omega(r+\Delta r)\cdot(r+\Delta r)\Delta\varphi \quad \text{(lengden av } \boldsymbol{v} \cdot \text{lengden av } cd\text{)}.$$

- da: $\boldsymbol{dr}$ peker nå i retning $-\boldsymbol{i}_r$ og $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \omega r\boldsymbol{i}_\theta \cdot (-dr\boldsymbol{i}_r) = 0$.

Vi legger sammen leddene og får

$$\begin{aligned} C &= -\omega r^2\Delta\varphi + \omega\big(r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2\big)\Delta\varphi \\ &= \omega\Delta r\Delta\varphi(2r+\Delta r). \end{aligned}$$

c) Stokes' sats:

$$\int_\sigma (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma = \oint_\lambda \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = C.$$

Vi regnet ut C for et flateelement $abcd$ i oppgave b). Hvis vi nå lar $r=0$ og $\Delta\varphi = 2\pi$ får vi sirkulasjonen C for en sirkelflate med radius Δr:

$$C = \omega\Delta r\Delta\varphi(2r+\Delta r) = 2\pi\omega(\Delta r)^2.$$

Dette er virvlingen for hele sirkelflaten. Deler vi C på arealet får vi virvlingen i et vilkårlig punkt i feltet:

$$C = \frac{2\pi\omega(\Delta r)^2}{\pi(\Delta r)^2} = 2\omega$$

med retning normalt sirkelflaten. For å regne ut virvlingen direkte bruker vi polarkoordinatformen:

$$\boldsymbol{v} = \omega r\boldsymbol{i}_\theta, \quad \nabla\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{k}.$$

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{v} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega r)\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\omega}{r}2r\boldsymbol{k} \\ &= 2\omega\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

Oppgave 4

Et hastighetsfelt er gitt ved

$$\boldsymbol{v} = \frac{C}{2\pi}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}\Big)$$

der C er en konstant.

a) For å finne uttrykket for $\boldsymbol{v}$ i polarkoordinater må vi bruke likningene:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ \boldsymbol{i} &= \cos\theta\boldsymbol{i}_r - \sin\theta\boldsymbol{i}_\theta \\ \boldsymbol{j} &= \sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos\theta\boldsymbol{i}_\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{C}{2\pi}\Bigg(-\frac{r\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}(\cos\theta\boldsymbol{i}_r - \sin\theta\boldsymbol{i}_\theta) \\ &\quad + \frac{r\cos\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}(\sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos\theta\boldsymbol{i}_\theta)\Bigg) \\ &= \frac{C}{2\pi r}\Big(-\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{i}_r + \sin^2\theta\boldsymbol{i}_\theta + \cos\theta\sin\theta\boldsymbol{i}_r + \cos^2\theta\boldsymbol{i}_\theta\Big) \\ &= \frac{C}{2\pi r}\boldsymbol{i}_\theta. \end{aligned}$$

b) Som i tilfellet i oppgave 3b) har vi også denne gangen at

$$\int\limits_{bc} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{da} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

siden $\boldsymbol{v}$ står normalt på $\boldsymbol{i}_r$ ($\boldsymbol{v}$ er tangent til sirkler med sentrum i origo). Sirkulasjonen, her kalt S, er derfor gitt ved

$$S = \oint\limits_{abcd} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\limits_{ab} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} + \int\limits_{cd} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Fra oppgave a) kan vi slutte at $\boldsymbol{v}$ er konstant langs sirkler med sentrum i origo og de to kurveintegralene kan regnes ut (som i oppgave 3b) ved å gange lengden av vektoren $\boldsymbol{v}$ med lengden av kurven:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{C}{2\pi r}\cdot r\Delta\varphi + \frac{C}{2\pi(r+\Delta r)}\cdot(r+\Delta r)\Delta\varphi \\ &= -\frac{C\Delta\varphi}{2\pi} + \frac{C\Delta\varphi}{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) Virvlingen i polarkoordinater:

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{v} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{k} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{C}{2\pi r}\right)\boldsymbol{k} \\ &= 0.\end{aligned}$$

d) Sirkulasjonen av $\boldsymbol{v}$ langs en sirkellinje λ:

$$S = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$$

der $d\boldsymbol{r}$ kan uttrykkes som $d\boldsymbol{r} = ds\boldsymbol{i}_\theta$ med ds som en liten buelengde.

$$\begin{aligned}S &= \oint_\lambda \frac{C}{2\pi r}\boldsymbol{i}_\theta \cdot ds\boldsymbol{i}_\theta \\ &= \frac{C}{2\pi r}\oint_\lambda ds \\ &= \frac{C}{2\pi r} \cdot 2\pi r \\ &= C.\end{aligned}$$

Vi har et singulært punkt i origo der $|\boldsymbol{v}| \to \infty$.

Oppgave 5

Et strømfelt i jordatmosfæren er gitt ved $\boldsymbol{v} = f(\theta)\boldsymbol{i}_\varphi$.

a) Divergensen til $\boldsymbol{v}$ (i sfæriske polarkoordinater):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 + 0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f(\theta)}{\partial \varphi} = 0.$$

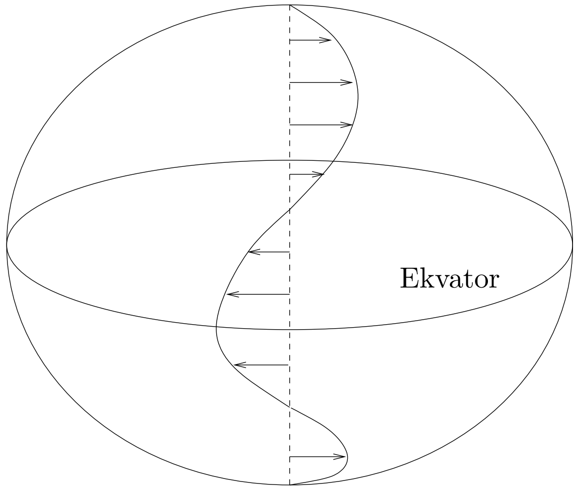
b) Vi setter nå $f(\theta) = C\sin 3\theta$ der C er en positiv konstant. θ tilsvarer breddegradene der $\theta = 0°$ er nordpolen, $\theta = 90°$ er ekvator og $\theta = 180°$ er sydpolen. Hvis vi tegner $\boldsymbol{v}$ inn på en kule får vi vindfeltet i figur 8.1.

c) Sirkulasjonen kan deles opp i fire deler:

$$S = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{ab} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{bc} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{cd} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{da} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

hvor vinkelkoordinatene for punkt a er (θ_0, φ_0), for punkt b er $(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0)$, for punkt c er $(\theta_0 + \Delta\theta, \varphi_0 + \Delta\varphi)$, og for punkt d er $(\theta_0, \varphi_0 + \Delta\varphi)$.

De fire delintegralene blir som følger:



Figur 8.1: Passat- og vestenvindsfeltet.

- ab: $d\boldsymbol{r}$ er et lite bueelement på en sirkel med radius r og har retning $\boldsymbol{i}_\theta$, følgelig er $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = f(\theta)\boldsymbol{i}_\varphi \cdot \boldsymbol{i}_\theta r d\theta = 0$.
- bc: $d\boldsymbol{r}$ er et lite bueelement på en sirkel med radius $r\sin(\theta_0+\Delta\theta)$ og har retning $\boldsymbol{i}_\varphi$. Langs bc er $\boldsymbol{v}$ konstant lik $f(\theta_0+\Delta\theta)\boldsymbol{i}_\varphi$. Da er $d\boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{v}$ parallelle.

$$\int_{bc} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = f(\theta_0+\Delta\theta) r \sin(\theta_0+\Delta\theta)\Delta\varphi$$

- cd: $d\boldsymbol{r}$ er et lite bueelement på en sirkel med radius r og har retning $-\boldsymbol{i}_\theta$, følgelig er $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = -f(\theta)\boldsymbol{i}_\varphi \cdot \boldsymbol{i}_\theta r d\theta = 0$.
- da: $d\boldsymbol{r}$ er et lite bueelement på en sirkel med radius $r\sin\theta_0$ og har retning $-\boldsymbol{i}_\varphi$. Langs da er $\boldsymbol{v}$ konstant lik $f(\theta_0)\boldsymbol{i}_\varphi$. Da er $d\boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{v}$ parallelle.

$$\int_{da} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = -f(\theta_0) r \sin\theta_0 \Delta\varphi$$

Vi legger sammen leddene og får

$$\begin{aligned} S &= r\left\{\sin(\theta_0+\Delta\theta) f(\theta_0+\Delta\theta) - \sin\theta_0 f(\theta_0)\right\}\Delta\varphi \\ &\approx r\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta f(\theta)\right\}\Big|_{\theta=\theta_0} \Delta\theta\,\Delta\varphi. \end{aligned}$$

Stokes sats:

$$\int_\sigma (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma = \oint_\lambda \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = S.$$

Sirkelflaten har areal $r^2\sin\theta_0\,\Delta\theta\,\Delta\varphi$ og har normalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_r$. Innsatt i Stokes sats

$$(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{i}_r r^2\sin\theta_0\,\Delta\theta\,\Delta\varphi = r\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta f(\theta)\right\}\Delta\theta\,\Delta\varphi$$

Vertikalkomponenten av virvlingen blir

$$(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{i}_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta f(\theta)\right\} = \frac{C}{r}\left[3\cos3\theta + \sin3\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

Oppgave 6

Newtons gravitasjonslov er gitt ved

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GmM\boldsymbol{r}}{r^3}$$

der $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ og $r = |\boldsymbol{r}|$.

a) Fra likning 4.20 på side 67 i kompendiet finner vi:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{r^3}\nabla \times \boldsymbol{r} + \nabla\left(-\frac{GmM}{r^3}\right) \times \boldsymbol{r}.$$

Vi ser på høyresiden ledd for ledd:

$$-\frac{GmM}{r^3}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\frac{GmM}{r^3}\big(0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}\big) = 0.$$

For å regne ut det andre leddet bruker vi først resultatet fra oppgave 8b i kapittel 2 for å regne ut gradientvektoren:

$$\begin{aligned}
\nabla\left(-\frac{GmM}{r^3}\right) &= -GmM\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \\
&= -GmM\left[\frac{\partial}{\partial x}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{j} + \right. \\
&\qquad \left.\frac{\partial}{\partial z}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{k}\right] \\
&= -GmM\left[-\frac{3}{2}\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{5}{2}}\big(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}\big)\right]
\end{aligned}$$

Vi krysser nå gradientvektoren med $\boldsymbol{r}$:

$$\begin{aligned}
\nabla\left(-\frac{GmM}{r^3}\right) \times \boldsymbol{r} &= 3GmM\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{5}{2}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= 3GmM\big(x^2+y^2+z^2\big)^{-\frac{5}{2}}\Big[(yz-zy)\boldsymbol{i} - (xz-zx)\boldsymbol{j} + (xy-yx)\boldsymbol{k}\Big] \\
&= 0 \\
\Rightarrow \quad \nabla \times \boldsymbol{F} &= 0.
\end{aligned}$$

b) Gravitasjonspotensialet V er definert ved $\boldsymbol{F} = -\nabla V$. I sfæriske koordinater kan vi skrive

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{r^3}r\boldsymbol{i}_r = -\frac{GmM}{r^2}\boldsymbol{i}_r.$$

Gradientvektoren i sfæriske koordinater er gitt i kapittel 8 som

$$\begin{aligned}
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \text{ledd i } \boldsymbol{i}_\varphi \text{ og } \boldsymbol{i}_\theta\text{-retning} \\
\Rightarrow \quad -\frac{\partial V}{\partial r} &= -\frac{GmM}{r^2} \\
V &= -\frac{GmM}{r} + V_0.
\end{aligned}$$

c) $V(r=R)=0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \dfrac{GmM}{R}$ og gravitasjonspotensialet kan skrives som

$$V = -GmM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = -GmM\frac{R-r}{Rr}.$$

Arbeidet er definert som kraft ganger vei:

$$\begin{aligned} W &= \int_\lambda \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -\int_R^{R+h} \nabla V \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -\int_R^{R+h} dV \\ &= V(R) - V(R+h) \\ &= 0 + GmM\frac{R-R-h}{R(R+h)} \\ &= -\frac{mgRh}{R+h}. \end{aligned}$$