Kapittel 9

Divergens- og virvelfrie felter. Potensialstrøm

Oppgave 1

Det eksisterer et hastighetspotensiale ϕ hvis feltet er virvelfritt. For et to-dimensjonalt felt $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ er virvlingen gitt ved

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Uttrykket for ϕ kan finnes fra likningen $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$. Hvis det også skal eksistere en strømfunksjon ψ må feltet være divergensfritt ($\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$).

a) $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$:

- $\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ eksisterer.
- $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad$ ingen ψ.

Hastighetpotensialet kan nå finnes:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = x \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + f_1(y)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y = y \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + f_2(x).$$

Vi ønsker en entydig ϕ slik at vi må velge

$$f_1(y) = \frac{1}{2}y^2 + C \quad \text{og} \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Potensialet blir derfor

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + C.$$

b) $\boldsymbol{v} = x^2y\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j}$:

- $\nabla \times \boldsymbol{v} = (-y^2 - x^2)\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad$ ingen ϕ.
- $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2xy - 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi$ eksisterer.

Vi løser to likninger for å finne strømfunksjonen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y = -xy^2 \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + f_1(y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -v_x = -x^2y \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + f_2(x).$$

For å få en entydig løsning må vi velge $f_1(y) = f_2(x) = C$ slik at strømfunksjonen blir

$$\psi(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + C.$$

c) $\boldsymbol{v} = \big(x^2 + y^2\big)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$:

- $\nabla \times \boldsymbol{v} = (2y - 2y)\boldsymbol{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi$ eksisterer.
- $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 2x + 2x = 4x \quad \Rightarrow \quad$ ingen ψ.

Vi finner uttrykket for ϕ:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = v_x = x^2 + y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2x + f_1(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = v_y = 2xy \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,y) = xy^2 + f_2(x).$$

For å få en entydig ϕ må vi velge

$$f_1(y) = C \quad \text{og} \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

slik at

$$\phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C.$$

Oppgave 2

a) $\phi = xy$. Vi finner først vektorfeltet, $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$, til hastighetspotensialet:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = y, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = x \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} &= y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Er vektorfeltet divergensfritt?

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

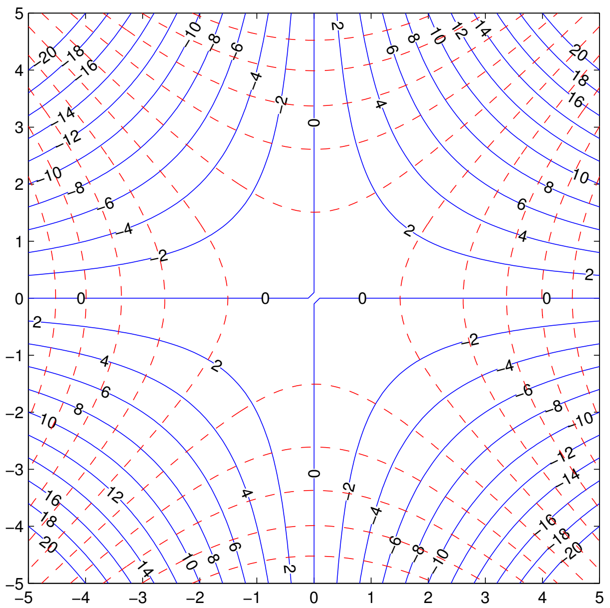
Vi kan nå innføre strømfunksjonen ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y = x \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + f_1(y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -v_x = -y \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = -\frac{1}{2}y^2 + f_2(x).$$

Vi velger f_1 og f_2 slik at

$$f_1(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$



Figur 9.1: Ekviskalarlinjer for hastighetspotensialet (blå, heltrukken linje) og strømlinjene (rød, stiplet linje).

og strømfunksjonen blir

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + C.$$

b) $\phi = xy^2 - x^2y$. Vektorfeltet $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ til hastighetspotensialet blir:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = y^2 - 2xy, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2xy - x^2 \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} &= \left(y^2 - 2xy\right)\boldsymbol{i} + \left(2xy - x^2\right)\boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Er vektorfeltet divergensfritt?

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2y + 2x.$$

ϕ er ikke et hastighetspotensiale for en divergensfri strøm. Det eksisterer ingen strømfunksjon.

Strømlinjene kan nå finnes ved å løse differensiallikningen $\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{r} = 0$. Denne differensiallikningen er imidlertid vanskelig å løse.

c) $\phi = x^2 - y^2$. Vi finner først vektorfeltet, $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$ til hastighetspotensialet:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2y \\ \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} &= 2x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

Er vektorfeltet divergensfritt?

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2 - 2 = 0.$$

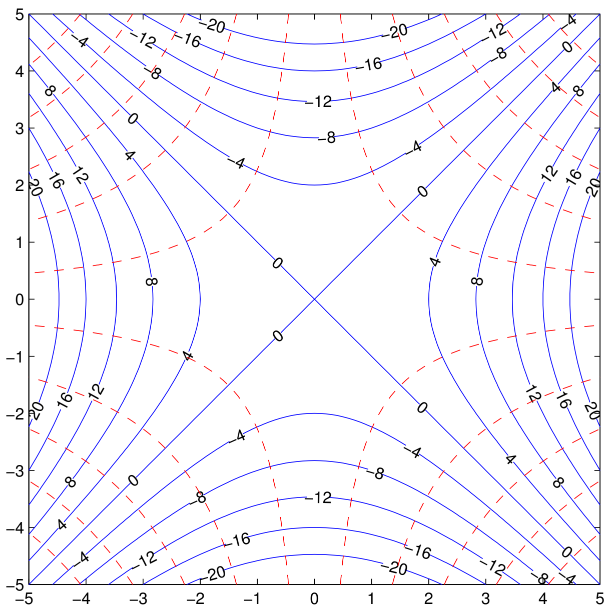
Vi kan nå finne strømfunksjonen ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y = -2y \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = -2xy + f_1(y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -v_x = -2x \qquad \Rightarrow \qquad \psi(x,y) = -2xy + f_2(x).$$

Vi må sette $f_1 = f_2 = C$ og strømfunksjonen blir

$$\psi(x,y) = -2xy + C.$$



Figur 9.2: Ekviskalarlinjer for hastighetspotensialet (blå, heltrukken linje) og strømlinjene (rød, stiplet linje).

Oppgave 3

a) Strømlinjene finnes ved å sette strømfunksjonen lik konstant ($\psi = \psi_0$):

$$\begin{aligned}\psi_0\left(x^2 + y^2\right) &= Ay \\ x^2 + y^2 - \frac{Ay}{\psi_0} &= 0.\end{aligned}$$

Vi ønsker å få leddet $y^2 - \dfrac{Ay}{\psi_0}$ over på formen $(y-c)^2$, der c er en konstant.

$$\begin{aligned} y^2 - \frac{Ay}{\psi_0} &= \left(y - \frac{A}{2\psi_0}\right)^2 - \left(\frac{A}{2\psi_0}\right)^2 \\ \Rightarrow \quad x^2 + \left(y - \frac{A}{2\psi_0}\right)^2 &= \left(\frac{A}{2\psi_0}\right)^2.\end{aligned}$$

b) En kilde/sluk plassert i origo har potensial $\phi = C \ln r$ der C er styrken til kilden/sluket og fortegnet bestemmer om det er en kilde eller et sluk. I kartesiske koordinater har vi

$$\phi = C \ln \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}.$$

For et sluk i punktet $(a, 0)$ med styrke $A/2a$ blir potensialet

$$\phi_1 = -\frac{A}{2a} \ln \left[(x-a)^2 + y^2\right]^{1/2}$$

og potensialet til en kilde i $(-a, 0)$ med samme styrke blir

$$\phi_2 = \frac{A}{2a} \ln \left[(x+a)^2 + y^2\right]^{1/2}.$$

Dipolfeltet fåes ved å addere feltene over:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = -\frac{A}{2a} \ln \left[(x-a)^2 + y^2\right]^{1/2} + \frac{A}{2a} \ln \left[(x+a)^2 + y^2\right]^{1/2}.$$

c) Regel: $\ln x^a = a \ln x$:

$$\phi = -\frac{A}{4a} \ln \left[(x-a)^2 + y^2\right] + \frac{A}{4a} \ln \left[(x+a)^2 + y^2\right].$$

Regel: $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$:

$$\phi = \frac{A}{4a} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} &= \frac{x^2 + 2ax + a^2 + y^2}{x^2 - 2ax + a^2 + y^2} \\
&= \frac{x^2 + y^2 + 2ax + a^2}{x^2 + y^2 - 2ax + a^2} \\
&= \frac{1 + \frac{2ax}{x^2+y^2} + \frac{a^2}{x^2+y^2}}{1 - \frac{2ax}{x^2+y^2} + \frac{a^2}{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Siden $x^2 + y^2 \gg a^2$ kan vi gjøre tilnærmingen $\dfrac{a^2}{x^2+y^2} \approx 0$ og brøken blir

$$\approx \quad \frac{1 + \frac{2ax}{x^2+y^2}}{1 - \frac{2ax}{x^2+y^2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{2}\epsilon}.$$

e) Vi innfører funksjonen

$$f(\epsilon) = \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{2}\epsilon}$$

og lager en rekkeutvikling til første orden av f om punktet ϵ_0:

$$\begin{aligned}
T_f^1 &= f(\epsilon_0) + f'(\epsilon_0)(\epsilon - \epsilon_0) \\
f'(\epsilon) &= \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\epsilon) + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\epsilon)}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon)^2} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon)^2} \\
\Rightarrow \quad T_f^1 &= \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon_0}{1 - \frac{1}{2}\epsilon_0} + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{(1 - \frac{1}{2}\epsilon_0)^2}.
\end{aligned}$$

Siden ϵ er en liten størrelse:

$$\epsilon = \frac{4ax}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \gg a^2$$

så vil T_f^1 være en god tilnærming til $f(\epsilon)$ i omegn av $\epsilon = 0$. Vi velger derfor $\epsilon_0 = 0$. Dette gir $T_f^1 = 1+\epsilon$ og

$$\frac{1+\frac{1}{2}\epsilon}{1-\frac{1}{2}\epsilon} \approx 1+\epsilon.$$

f) Vi innfører funksjonen $f(\epsilon) = \ln(1+\epsilon)$. Taylorutviklingen til første orden av f om punktet ϵ_0 blir

$$\begin{aligned} T_f^1 &= f(\epsilon_0) + f'(\epsilon_0)(\epsilon - \epsilon_0) \\ &= \ln(1+\epsilon_0) + \frac{\epsilon-\epsilon_0}{1+\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Vi velger $\epsilon_0 = 0$ med samme begrunnelse som i oppgave e) og får $T_f^1 = \epsilon$ som gir

$$\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon.$$

Vi kan nå finne det ønskede uttrykket for hastighetspotensialet:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{A}{4a} \ln \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \\ \text{oppg.d)} \quad &= \frac{A}{4a} \ln \frac{1+\frac{1}{2}\epsilon}{1-\frac{1}{2}\epsilon} \\ \text{oppg.e)} \quad &= \frac{A}{4a} \ln(1+\epsilon) \\ \text{oppg.f)} \quad &= \frac{A}{4a}\epsilon \\ &= \frac{Ax}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 4

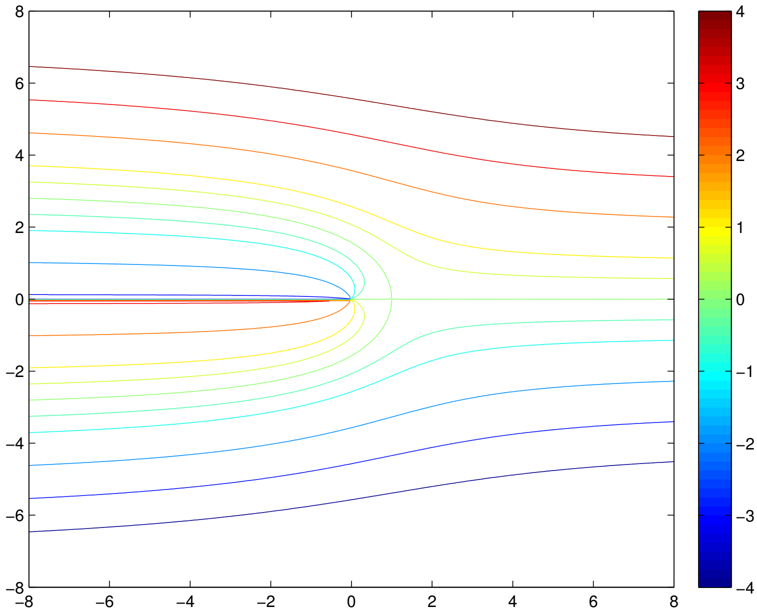
Vi har gitt to potensialfelt $\psi_1 = Uy$ (translasjonsfelt/rettlinjet strøm) og $\psi_2 = -A\theta$ (kilde). For at vi skal kunne superponere feltene må både ψ_1 og ψ_2 være beskrevet i samme koordinatsystem. Vi skriver ψ_1 i polarkoordinater: $\psi_1 = Ur\sin\theta$. Det sammensatte feltet kan skrives som

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Ur\sin\theta - A\theta.$$

Strømlinjene finnes ved å sette strømfunksjonen konstant (ψ_0):

$$\begin{aligned} \psi_0 &= Ur\sin\theta - A\theta \\ \Rightarrow \quad r &= \frac{\psi_0}{U\sin\theta} + \frac{A\theta}{U\sin\theta}. \end{aligned}$$

Se figur 9.3: Legg spesielt merke til at det er et stagnasjonspunkt like til høyre for origo, og at en strømlinje som går igjennom stagnasjonspunktet krummer seg som en "skål" mot venstre.



Figur 9.3: Strømlinjene $\psi_0 = -4, -3, -2, -1, -.5, 0, .5, 1, 2, 3, 4$. Konstantene er satt til å være $U = A = 1$.

Oppgave 5

En kilde i origo er gitt i polarkoordinater som

$$\begin{aligned} \phi &= A \ln r \\ \psi &= -A\theta. \end{aligned}$$

Fra $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ får vi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \mathrm{atan2}(y, x),$$

se kommentar på side 94 for en beskrivelse av funksjonen atan2.

Dette gir hastighetspotensialet og strømfunksjonen i kartesiske koordinater:

$$\begin{aligned} \phi &= A \ln \sqrt{x^2 + y^2} \\ \psi &= -A\,\mathrm{atan2}(y, x). \end{aligned}$$

Strømvektoren $\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}$ kan finnes fra likningene

$$\begin{aligned} &(1) \qquad v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (3) \\ &(2) \qquad v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (4). \end{aligned}$$

Her er det valgfritt om vi bruker (1) eller (2), og (3) eller (4). (1) gir

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &= \frac{A}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{A}{x+\frac{y^2 x}{x^2}} \\ &= \frac{Ax}{x^2+y^2} \\ &= \frac{Ax}{r^2}. \end{aligned}$$

(3) gir

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= -\frac{A}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= \frac{Ay}{x^2+y^2} \\ &= \frac{Ay}{r^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 6

Fra oppgave 5 har vi ϕ og ψ for en kilde med styrke A i origo i kartesiske koordinater. For å finne uttrykket for en kilde utenfor origo trenger vi bare å justere koordinatene.

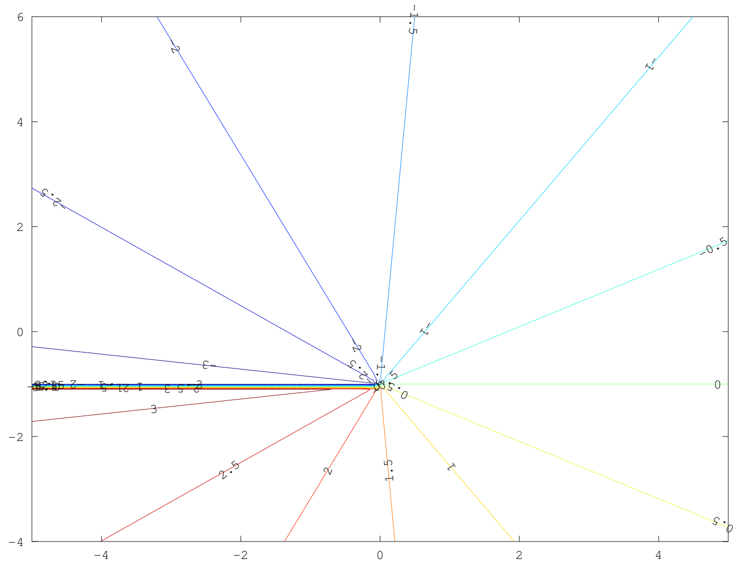
- En kilde i punktet $(0, a)$:

$$\begin{aligned} \phi &= A \ln \left(x^2 + (y-a)^2\right)^{1/2} \\ \psi &= -A \,\mathrm{atan2}(y-a, x). \end{aligned}$$

- En kilde i punktet $(0, -a)$:

$$\begin{aligned} \phi &= A \ln \left(x^2 + (y+a)^2\right)^{1/2} \\ \psi &= -A \,\mathrm{atan2}(y+a, x). \end{aligned}$$

Se figur 9.4, og legg spesielt merke til at det er problematisk å tegne konturplott for ψ med Matlab sin `contour`-funksjon fordi atan2-funksjonen har et diskontinuerlig hopp mellom $-\pi$ og π rett til venstre for det singulære punktet. Se kommentar på side 94 for en beskrivelse av funksjonen atan2.



Figur 9.4: Strømlinjene til kilden i punktet $(0, -a)$ med $A = a = 1$.

Oppgave 7

En punktvirvel i origo er i polarkoordinater gitt ved

$$\begin{aligned} \phi &= A\theta \\ \psi &= A \ln r. \end{aligned}$$

For å skrive ϕ og ψ i kartesiske koordinater kan vi bruke likningene

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{atan2}(y, x),$$

se kommentar på side 94 for en beskrivelse av funksjonen atan2.

Hastighetspotensialet og strømfunksjonen blir dermed

$$\begin{aligned} \phi &= A\, \text{atan2}(y, x) \\ \psi &= A \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Komponentene til strømvektoren kan vi finne på samme måte som i oppgave 5:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{Ay}{r^2} \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{Ax}{r^2}. \end{aligned}$$

Oppgave 8

Vi har gitt strømfunksjonen til to potensialfelt:

$$\psi_1 = -Uy, \quad \psi_2 = \frac{Ay}{x^2 + y^2}.$$

Det superponerte feltet har strømfunksjon

$$\psi = -Uy + \frac{Ay}{x^2+y^2}.$$

a) Vi innfører polarkoordinater ved $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$:

$$\begin{aligned}\psi &= -Ur\sin\theta + \frac{a^2 Ur\sin\theta}{r^2} \\ &= -U\left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right] r\sin\theta.\end{aligned}$$

b) Strømkomponentene kan finnes fra likningene

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

$$\begin{aligned}v_r &= -\frac{1}{r}(-U)\left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right] r\cos\theta \\ &= U\left[1 - \frac{a^2}{r^2}\right]\cos\theta \\ v_\theta &= -U\sin\theta - \frac{Ua^2}{r^2}\sin\theta \\ &= -U\left[1 + \frac{a^2}{r^2}\right]\sin\theta.\end{aligned}$$

På sirkellinjen $r = a$ blir strømkomponentene $v_r(r{=}a) = 0$ og $v_\theta(r{=}a) = -2U\sin\theta$.

Oppgave 9

Den elektriske feltstyrken utenfor en elektrisk ladet partikkel er gitt ved

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{r^2}\boldsymbol{i}_r.$$

Potensialet, V, er gitt ved $\boldsymbol{E} = -\nabla V$. I denne oppgaven må vi bruke kulekoordinater, og vi har at

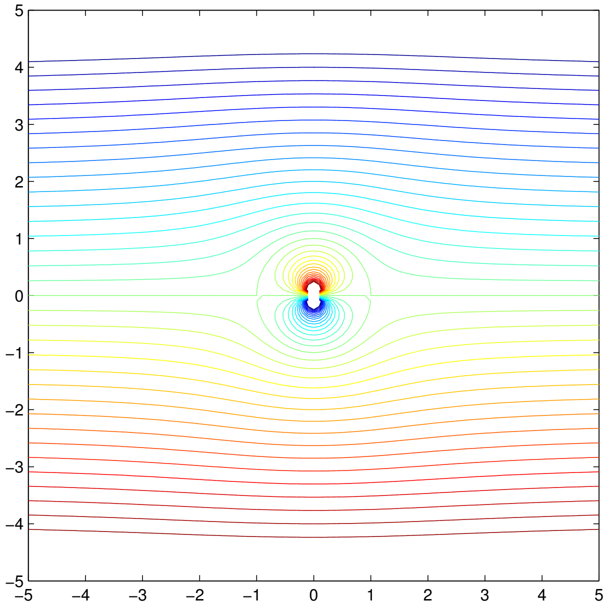
$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}_\varphi.$$

$$\begin{aligned}\frac{Q}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad &\Rightarrow \quad V = \frac{Q}{r} + f_1(\theta,\varphi) \\ 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} \quad &\Rightarrow \quad V = f_2(r,\varphi) \\ 0 = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi} \quad &\Rightarrow \quad V = f_3(r,\theta)\end{aligned}$$

Potensialet blir derfor

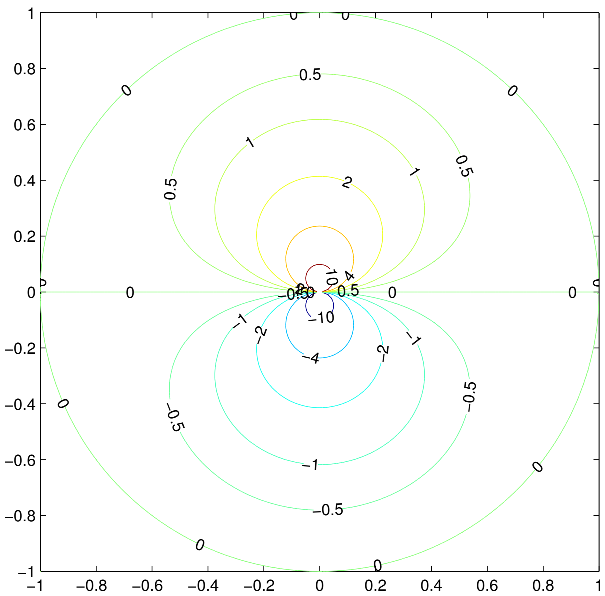
$$V = V(r) = \frac{Q}{r} + C$$

hvor C er en vilkårlig konstant.



Figur 9.5: Strøm rundt en sylinder ($r > a$)

.



Figur 9.6: Feltet for $r < a$ blir et dipolfelt.

Kommentar om funksjonen **atan2**(y, x)

Et punkt i xy-planet har posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$. Vinkelen mellom posisjonsvektor og positiv x-akse er gitt ved $\operatorname{atan2}(y, x)$. Dersom puktet ligger i første eller fjerde kvadrant har vi $\operatorname{atan2}(y, x) = \arctan(y/x)$. Dersom punktet ligger i andre kvadrant har vi $\operatorname{atan2}(y, x) = \arctan(y/x) + \pi$. Dersom punktet ligger i tredje kvadrant har vi $\operatorname{atan2}(y, x) = \arctan(y/x) - \pi$.