Løsningsforslag for noen av oppgavene i deleksamen i MEK1100 gitt 15 mars 2016

Oppgave 2

2g Likningene som representerer strømlinjene er løsninger av $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$. Vi har

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ y & -x & z \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{vmatrix} = (-x\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y)\boldsymbol{i} + (z\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}z)\boldsymbol{j} + (y\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}x)\boldsymbol{k}$$

og får derfor de tre skalare likningene

$$-x\,\mathrm{d}z = z\,\mathrm{d}y, \qquad z\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}z, \qquad y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x.$$

Den tredje differensiallikninga er separabel og kan integreres opp umiddelbart

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x$$

som gir $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$ hvor C er en vilkårlig konstant. Vi skriver dette på en penere måte

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

hvor vi har byttet om til den ikke-negative konstanten r som er radius til sirkel rundt $x = y = 0$.

Vi beskriver nå sirkelen ved hjelp av polare koordinater, $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$. I henhold til likning (1) er radius r konstant, så vi har i praksis redusert de to variablene x og y til kun én variabel θ. Vi innser da at differensialene av x og y blir $\mathrm{d}x = -r\sin\theta\mathrm{d}\theta$ og $\mathrm{d}y = r\cos\theta\mathrm{d}\theta$.

Vi kan nå benytte hvilken som helst av de to første differensiallikningene, uansett vi vi ende opp med samme likning $\mathrm{d}z = -z\mathrm{d}\theta$ som er separabel. Vi løser den slik

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int \mathrm{d}\theta$$

som gir $\ln|z| = -\theta + B$ hvor B er en vilkårlig konstant. Dersom vi tar eksponentialet av denne likninga får vi

$$z = A\exp(-\theta) \tag{2}$$

for en vilkårlig konstant A.

Merk: Vi har kvittet oss med absoluttverditegnet rundt z ved å tillate konstanten A å være både positiv og negativ.

Strømlinjene for $z = 0$ er sirkler rundt origo i henhold til (1) sammen med $A = 0$ i (2).

Strømlinjene for $z \neq 0$ er spiraler med konstant avstand r fra z-aksen og med endring av z-verdi med faktor $\exp(-2\pi)$ for hver omdreining (økning av vinkelen θ med verdi 2π).