

Oblig 2 MEK1100, vår 2016

Krav til innlevering og godkjenning

Hvert punkt gir maksimalt 10 poeng. I alt kan du oppnå 100 poeng. Vi krever minimum 70 prosent, eller 70 poeng for å få godkjent. Dersom dette ikke er innfridd ved innlevering, men besvarelsen vurderes som et seriøst forsøk, kan det gis anledning til ny innlevering. For informasjon om regler se <http://www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html>. Tidsfrister er gitt på semestersidene til MEK1100.

Du kan bruke \LaTeX eller levere en håndskrevet besvarelse. Ta med autentiske listinger av alle skript og funksjoner i Matlab eller Python, samt de kjøreeksempelene det bes om. I utgangspunktet skal alle skript kjøre, men du kan få noe uttelling for ufullstendige forsøk som ikke gir rett resultat. Kjøreeksampler som ikke kan framkomme som resultat av vedlagte skript, gir ikke poeng.

Det skal stå filnavn på alle listinger av skript og funksjoner, og oppgavenummer (med delpunkt) på alle resultatlistinger og plott.

Det er fritt fram for å bruke Matlab eller Python eller andre systemer som man måtte like bedre (Octave, etc.) så lenge man har til disposisjon de samme numeriske og grafiske kapasitetene.

1 Varmeledningslikning og numerisk løsning

Vi skal studere temperaturen $T(x, t)$ i en stav med lengde L og varmediffusivitet κ . Ved tiden $t = 0$ holder staven temperatur T_0 . For etterfølgende tider $t > 0$ holdes venstre ende av staven stadig på temperatur T_0 , mens høyre ende av staven holdes på en høyere temperatur $T_1 > T_0$. Problemet kan stilles opp slik:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} && \text{for } 0 \leq x \leq L \quad \text{og } t > 0 \\ T(x, 0) &= T_0 && \text{for } 0 \leq x \leq L \\ T(0, t) &= T_0 \quad \text{og} \quad T(L, t) = T_1 && \text{for } t > 0\end{aligned}$$

a) Skalering

Ved å innføre nye skalerte og dimensjonsløse variabler

$$u^* = \frac{T - T_0}{\alpha} \quad t^* = \frac{t}{\beta} \quad x^* = \frac{x}{\gamma}$$

kan vi omforme problemet til normalisert form som vist nedenfor. Stjernemerkede variabler angir *dimensjonsløse måltall* (se kapittel 1.6 i Gjevik & Fagerland). I det følgende skal vi jobbe videre med denne normaliserte formen:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \quad \text{for } 0 \leq x^* \leq 1 \quad \text{og } t^* > 0$$

$$u^*(x^*, 0) = 0 \quad \text{for } 0 \leq x^* \leq 1$$

$$u^*(0, t^*) = 0 \quad \text{og} \quad u^*(1, t^*) = 1 \quad \text{for } t^* > 0$$

Bestem verdiene til α , β og γ .

Hint: Ved hjelp av kjerneregelen for derivasjon har vi for eksempel

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t^*}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t^*}$$

I deloppgaver bcde nedenfor sløyfer vi *-tegnet, men vi husker at vi arbeider med dimensjonsløse størrelser, dermed får vi presentert likningene på pen og enkel form (se nederst side 21 i Gjevik & Fagerland).

b) Likevektsløsning

Med en "likevektsløsning" mener vi en løsning som ikke avhenger av tid, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, denne løsningen skal vi betegne $u = U(x)$. Finn likevektsløsningen for det normaliserte problemet.

c) Den generelle løsningen nærmer seg likevektsløsningen

Definer $\theta = u - U$. La $I(t) = \int_0^1 \theta^2 dx$. Vis at $I \geq 0$ og $\frac{dI}{dt} \leq 0$.

Hint: Gjennomfør en én-dimensjonal utgave av eksempel 8.1 i Matthews.

I resten av denne oppgaven skal vi få inntrykk av hvordan løsningen nærmer seg likevektsløsningen, vi gjør dette ved å løse problemet numerisk.

d) Numerisk diskretisering

Vi skal diskretisere løsningen som $u_{m,n} = u(x_m, t_n)$ hvor $m = 1, \dots, M$ og $t_n = n\Delta t$ hvor $n = 0, 1, 2, \dots$. I Matlab lar vi $\mathbf{x} = \text{linspace}(0, 1, M)$ for jevnt fordelte punkter x_m i intervallet $[0, 1]$ med $\Delta x = \frac{1}{M-1}$.

Førstederivert med hensyn på tid skal vi tilnærme med differensformelen

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{m,n} \approx \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} \tag{1}$$

Andrederivert med hensyn på rom skal vi tilnærme med differensformelen

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \tag{2}$$

Vis ved Taylor-utvikling at feilen i likning (1) er av størrelsesorden Δt . Finn ut av hvilken størrelsesorden feilen i likning (2) er.

e) En numerisk metode

Ved å sette likningene (1) og (2) sammen får vi følgende *eksplisitte* skjema

$$u_{m,n+1} = r u_{m+1,n} + (1 - 2r) u_{m,n} + r u_{m-1,n}$$

hvor $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$. På semestersiden kan du laste ned en av filene `varmeledning.m` eller `varmeledning.py` som bruker dette skjemaet og som i tillegg sørger for å oppfylle randkravene.

Lag et skript `Ttest.m` eller `Ttest.py` som kaller opp $\mathbf{u} = \text{varmeledning}(\text{ustart}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{N}, \mathbf{r})$ og som plotter opp temperaturprofilen for $u(x, t)$ som funksjon av x for noen utvalgte tider t , for eksempel $t \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$. Velg startverdien $\mathbf{u} = \text{zeros}(\mathbf{1}, \mathbf{M})$. Velg for eksempel $M = 10$ og $N = 20$. Legg merke til at $\Delta t = 0.1/N$ for de nevnte tidene.

Vi må være forsiktig med verdien til parameteren r . Vis at dersom Δt blir så stor i forhold til Δx at $r > 0.5$, så kan den numeriske løsningen bli ustabil og få urealistiske verdier. Vis også at dersom Δt er så liten at $r < 0.5$, så vil den numeriske løsningen konvergere mot likevektsløsningen.

f) Karakteristisk tid for konvergens mot likevektsløsning

Forhåpentligvis har forrige oppgavepunkt tjent til å overbevise om at temperaturprofilen praktisk talt har konverget mot likevektsprofilen etter en dimensjonsløs tid $t^* \approx 0.5$. Nå skal vi oversette dette til fysisk virkelighet:

Uttrykk den tilsvarende karakteristiske fysiske tiden t uttrykt ved tykkelsen L og varmediffusiviteten κ .

I tabell 10.1 i Gjevik & Fagerland finner du varmediffusiviteter for fire forskjellige stoffer. Bruk disse varmediffusivitetene, anta tykkelsen er $L = 10\text{cm}$, og regn ut karakteristiske tider i sekunder.

Merk: Denne utregningen er høyst urealistisk for luft og vann fordi disse to stoffene er flytende og vil tillate konveksjon som vi ikke har tatt hensyn til her!

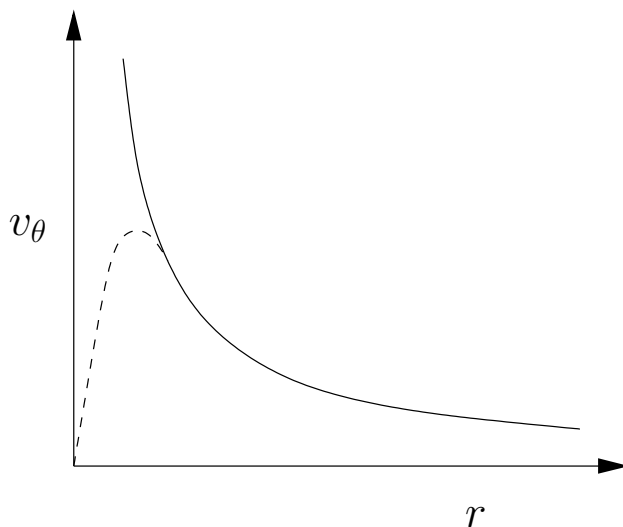
2 Hastighetsfeltet i en strømvirvel

Vi kjenner til mange eksempler på strømvirvler: Fyll vasken eller badekaret med vann, rør litt om, trekk ut proppen, og se på strømmingen! Dersom du befinner deg i kano eller robåt, studer strømmingen som skapes nær kanten av åra! Dersom løst løv ligger nært et hushjørne og det blåser litt, kan vinden få løvet til å gå rundt i sirkelbevegelse. I alle disse eksemplene er det lett å innse at den sirkulære hastigheten går mot null vilkårlig langt fra virvelens sentrum.

En enkel modell for en slik strømvirvel får vi ved å anta at strømmingen er både divergensfri $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ og virvelfri $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Strømmingen antas divergensfri fordi fluidet antas inkompressibelt. Ettersom strømmingen i tillegg er todimensjonal i det horisontale xy -planet, så vet vi at det finnes en strømfunksjon ψ slik at $\mathbf{v} = \nabla \times (-\psi \mathbf{k})$ hvor \mathbf{k} er enhetsvektor i vertikal retning. Strømmingen antas virvelfri fordi dette generelt er en god antakelse for friksjonsfri strømming. Med disse antakelsene innser vi at strømfunksjonen må oppfylle Laplace likning

$$\nabla^2 \psi = 0.$$

Løsningen som representerer en strømvirvel i origo finner vi i Gjevik & Fagerland kapittel 9.4.4 i polare koordinater, $\psi = A \ln r$ og $\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{i}_\theta$ og $v_\theta = \partial \psi / \partial r = A/r$. Her er $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$, hvor r er radiell avstand fra origo og θ vinkelen med x -aksen. Den samme løsningen finner vi i Lindstrøm & Hveberg eksempel 6.5.8 i kartesiske koordinater for $A = 1$. Løsningen er representert grafisk ved den heltrukne kurven i figur 9.7 i Gjevik & Fagerland som vi har reproduisert her. Vi ser at hastighetsfeltet går mot null vilkårlig langt fra sentrum:



Den enkle modellen ovenfor bryter sammen i origo fordi hastigheten der blir uendelig stor og peker i alle retninger samtidig! Naturen oppfører seg selvfølgelig ikke slik. Kanskje vi klarer å observere at midt i badekarets strømvirvel er det ikke vann i det hele tatt? Det er ikke vanskelig å observere at løst løv i midten av en strømvirvel nær et hushjørne kun vil rotere svært langsomt? Vi skal gripe fatt i dette siste tilfellet: Nær sentrum av strømvirvelen vil friksjon på grunn av viskositet være viktig, denne friksjonen vil redusere hastigheten mot null inn mot sentrum, som antydnet ved den stiplede kurven i figuren. Det som skjer er at antakelsen om virvelfri bevegelse bryter sammen nær origo!

I et to-dimensjonalt divergensfritt felt i xy -planet kan virvlingen til strømvektoren uttrykkes ved strømfunksjonen

$$\mathbf{c}(x, y) = \nabla \times \mathbf{v} = \nabla^2 \psi \mathbf{k}$$

hvor virvlingsvektoren er $\mathbf{c}(x, y) = c(x, y)\mathbf{k}$ og \mathbf{k} stadig er normalvektoren til planet. Dersom en kjenner virvlingen $c(x, y)$ vil en kunne finne strømfunksjonen ved å løse likningen

$$\nabla^2 \psi = c(x, y).$$

Denne differensiallikningen, som er en generalisering av Laplace-likningen, kalles Poisson-likningen. Den dukker opp i mange forbindelser i hydrodynamikk og elektromagnetisme.

Vi skal betrakte aksesymmetriske felt hvor virvling og strømfunksjon bare avhenger av avstanden r fra origo. Bruker vi uttrykket for Laplace-operatoren i polare koordinater (se kapittel 9.3 i Gjevik & Fagerland) finner vi

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = c(r). \quad (3)$$

Først skal vi løse Poisson-likningen for et enkelt tilfelle: La virvlingens størrelse være

$$c(r) = \begin{cases} \tilde{c} & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

hvor \tilde{c} er en konstant. Husk at konstant virvling betyr rotasjon som fast legeme, altså en “karusell”. For $r \leq a$ gjelder da Poisson-likningen

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \tilde{c},$$

og for $r > a$ gjelder Laplace-likningen med høyresiden i likningen ovenfor lik 0.

a) Analytisk løsning av Poisson- og Laplace-likningene

Vis at den analytiske løsningen av disse likningene er

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \tilde{c} r^2 + \alpha \ln r + \beta & r \leq a \\ A \ln r + B & r > a \end{cases}$$

hvor α , β , A og B er konstanter.

Finn strømhastigheten $v_\theta = \partial \psi / \partial r$ og bestem konstantene slik at både strømfunksjonen og strømhastigheten blir kontinuerlige funksjoner av r og slik at både strømfunksjonen og strømhastigheten settes lik null i origo.

Sammenlikn med figur 9.7 i Gjevik & Fagerland. Hva har skjedd med det singulære punktet i origo?

Nå skal vi lage en metode for å løse likning (3) numerisk. Vi starter med å skrive

$$\frac{\partial}{\partial r} (rv) = rc(r).$$

Vi skal diskretisere løsningen som $v_n = v(r_n)$ og virvlingen som $c_n = c(r_n)$ hvor $n = 1, \dots, N$. I Matlab lar vi $\mathbf{r} = \mathbf{linspace}(\mathbf{0}, \mathbf{R}, \mathbf{N})$ for jevnt fordelte punkter r_n i intervallet $[0, R]$ med $\Delta r = \frac{R}{N-1}$.

Vi skal tilnærme førstederivert med formelen

$$\frac{\partial u}{\partial r} \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta r}.$$

Vi tilnærmer høyresiden med middelverdien i de to punktene

$$rc(r) \approx \frac{r_{n+1}c_{n+1} + r_n c_n}{2}.$$

Vår numeriske metode blir da

$$\frac{r_{n+1}v_{n+1} - r_n v_n}{\Delta r} = \frac{r_{n+1}c_{n+1} + r_n c_n}{2} \quad (4)$$

sammen med et randkrav i origo, nemlig

$$v = 0 \quad \text{for} \quad r = 0. \quad (5)$$

b) Vår numeriske metode reproduserer rotasjon som fast legeme eksakt

Vis at denne numeriske metoden er eksakt for konstant virvling $c = \tilde{c}$, det vil si for en “karusell”.

Hint: Finn den analytiske løsningen for rotasjon som fast legeme og vis at den oppfyller likningene (4) og (5).

c) En numerisk løsning

Metoden kan implementeres som en likning på matriseform

$$MV = B$$

hvor V er en søylevektor med alle v_n , B er en søylevektor med elementer definert av høyresidene i likningene (4) og (5), og M er en matrise definert av venstresidene i likningene (4) og (5).

Dette likningssystemet løser vi på datamaskin ved kommandoen $V = M \setminus B$, se kapittel 4.5.2 i Lindstrøm & Hveberg.

Lag et skript `virvel.m` eller `virvel.py` som løser likningen numerisk. Finn den numeriske løsningen og sammenlikn med den analytiske løsningen funnet i deloppgave 2a. Sett for eksempel $R = 10$, $a = 4$, $\tilde{c} = 1$ og $N = 50$. Framstill den analytiske og numeriske løsningen grafisk i samme plott.

d) En annen numerisk løsning

Nå prøver vi en litt mer komplisert virvling, nemlig

$$c(r) = \begin{cases} 1 & r \leq a \\ \frac{r-b}{a-b} & a < r \leq b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Sett for eksempel $R = 10$, $a = 3$, $b = 5$ og $N = 50$.

Får du et resultat som likner på den stiplede kurven i figur 9.7 i Gjevik & Fagerland?