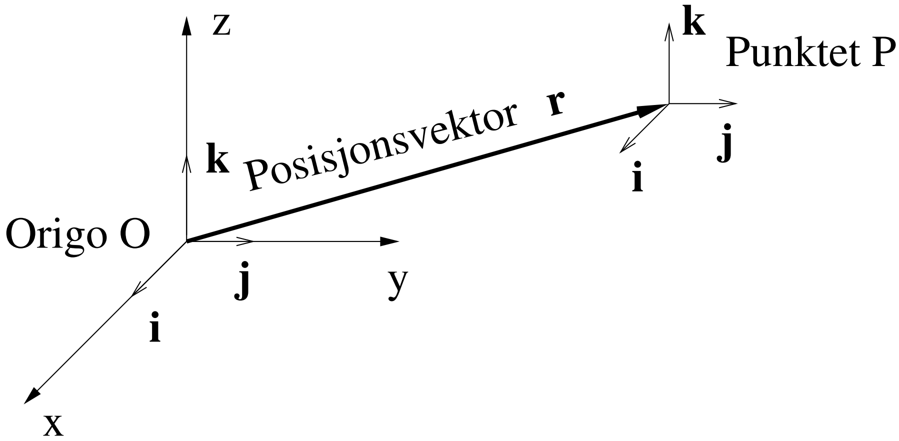
Forelesning 19/1–2017

Eksempler på felt i naturen og deres grafiske framstilling

Posisjonsvektor, koordinater og koordinatvektorer

De kartesiske koordinatene er velkjent. I tredimensjonalt rom har vi de tre koordinatene x, y og z. De tilhørende aksene står normalt på hverandre. Et punkt P kan angis ved sine koordinater (x, y, z). Origo O er punktet med koordinater $(0, 0, 0)$.

I figuren ser vi en alternativ måte å angi punktet P, nemlig ved hjelp av en posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ som spennes ut fra origo O til punktet P.



Spørsmålet er hvordan vi kan representere posisjonsvektoren $\boldsymbol{r}$. Vi skal gjøre dette ved hjelp av koordinatvektorer. Disse definerer vi på følgende måte:

> Du står i et punkt. Hold alle koordinatene konstant. Øk én av koordinatene litt. Hvilken retning beveger du deg?

Svaret gir koordinatvektoren for den utvalgte koordinaten.

Dersom vi ser tilbake på figuren ovenfor, og gjør denne øvelsen i punktet P, og i origo O, og i et hvilket som helst annet punkt, så vil vi oppdage at koordinatvektorene for de kartesiske koordinatene er de samme overalt, de er ikke funksjoner av posisjon. Derfor sier vi at det kartesiske koordinatsystemet er **rettlinjet**. Dette er faktisk en av de beste egenskapene til de kartesiske koordinatene!

Vi skal la koordinatvektorene til henholdsvis $\{x, y, z\}$ få navn $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, og vi skal la disse ha enhets lengde $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$.

Vi kan nå skrive posisjonsvektoren fra O til P som $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Vi ser at koordinatene til P er (x, y, z) og koeffisientene til posisjonsvektoren til P også er (x, y, z). Vi trenger altså ikke ta stilling til om notasjonen (x, y, z) betyr koordinatene til punktet eller koeffisientene til posisjonsvektor til punktet. Vi skal straks se at dette ikke gjelder for koordinater som ikke er rettlinjet!

Skalarprodukt, ortogonale vektorer

Se GF kap. 1.4.

La $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ og $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$, da er skalarproduktet $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

To vektorer med lengde ulik null er ortogonale dersom skalarproduktet er null. Ortogonalitet kan vi angi med symbolet $\perp$.

Mer at dersom $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ så er enten $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$ eller $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ eller $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, det er meningsløst å snakke om at en null-vektor er ortogonal.

Lengden av en vektor, vinkelen mellom to vektorer

Vi introduserer vinkelen θ mellom de to vektorer slik at $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos\theta$. Lengden av en vektor kan uttrykkes som $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$. Ortogonale vektorer har vinkel 90° og sies å stå "vinkelrett" eller "normalt" på hverandre.

Rettvinklet koordinatsystem

Når alle koordinatvektorene står vinkelrett på hverandre vil multiplikasjonstabellen for skalarproduktet mellom koordinatvektorene ser slik ut:

$\cdot$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

For å finne ut om et koordinatsystem er rettvinklet kan vi undersøke om skalarprodukt-multiplikasjonstabellen mellom koordinatvektorene ser slik ut.

Kryssprodukt, parallelle vektorer

Se GF kap. 1.4.

Kryssproduktet kan vi skrive symbolsk ved hjelp av en determinant

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

og fra dette følger det at $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\sin\theta$.

To vektorer med lengde ulik null er parallelle dersom kryssproduktet er null. Parallellitet kan vi angi med symbolet $\|$.

Mer at dersom $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = 0$ så er enten $\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{B}$ eller $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ eller $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, det er meningsløst å snakke om at en null-vektor er parallell.

Høyrehånds rettvinklet koordinatsystem

Når alle koordinatvektorene står vinkelrett på hverandre og utgjør et høyrehåndssystem vil multiplikasjonstabellen for kryssproduktet mellom koordinatvektorene ser slik ut:

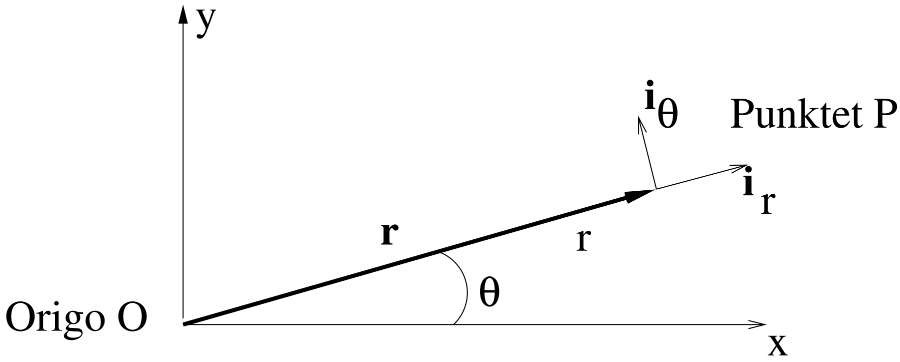
$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$

For å finne ut om et rettvinklet koordinatsystem er et høyrehåndssystem kan vi undersøke om kryss-multiplikasjonstabellen mellom koordinatvektorene ser slik ut.

Polare koordinater, krumlinjede koordinater

Vi begrenser oss til planet som har kartesiske koordinater x og y, men vi ønsker å bruke avstanden r og vinkelen θ istedenfor. Relasjonene er $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.

Punktet P kan nå beskrives enten med kartesiske koordinater (x, y) eller med polare koordinater (r, θ).



La oss se på posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}$. Dersom vi nå følger oppskriften for å finne koordinatvektorene i punktet P, så oppdager vi at koordinatvektoren i r-retning, og med enhets lengde, er $\boldsymbol{i}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$. Vi kan også finne koordinatvektoren i θ-retning, $\boldsymbol{i}_\theta$, men vi trenger ikke uttrykket for den nå. Legg merke til at koordinatvektorene nå er funksjoner av posisjon, de avhenger av vinkelen θ. Derfor sier vi at det polare koordinatsystemet er **krumlinjet**.

Vi kan nå skrive posisjonsvektor fra O til P ved hjelp av de polare koordinatvektorene i punktet P, og vi legger merke til at vi da kun trenger koordinatvektoren i r-retning, $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r + 0\boldsymbol{i}_\theta$. Vi ser at de polare koordinatene til P er (r, θ) mens koeffisientene til posisjonsvektoren til P nå er $(r, 0)$. Nå er det altså ikke likegyldig om notasjonen (ξ_1, ξ_2) betyr koordinatene til punktet eller koeffisientene til posisjonsvektor til punktet. Dette er typisk for krumlinjede koordinater.

Notasjonen (ξ_1, ξ_2) er grei for å angi vektorer og punkter i kartesiske koordinater, men er forvirrende for å skrive vektorer i krumlinjede koordinater fordi det er uklart om den angir koordinater eller vektorkoeffisienter.

I dette kurset skal vi jobbe mye med krumlinjede koordinater, og derfor liker vi å skrive vektorer med koordinatvektorer.

Eksempel: Dersom vi angir punktet P ved hjelp av posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r$, hvor har det da blitt av vinkelen θ? Svaret er at koordinatvektoren er funksjon av vinkelen, så en tydeligere skrivemåte kunne ha vært $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r(\theta)$.

Skalering, dimensjonsanalyse og Buckinghams Pi teorem