Forelesning 23 den 18/4–2017

Eksperiment "Toricelli" — hvor fort renner vann ut av et kar?

Vi navngir eksperimentet til ære for Evangelista Torricelli (1608–1647) som oppdaget "Toricellis lov" i 1643. Toricelli var inspirert av Galileo Galilei (1564–1642), men levde for tidlig til å være kjent med Newtons lover (Isaac Newton 1642–1726). Vi har lært om Eulers likning som en tilrettelegging av Newtons andre lov for anvendelse på fluider (Leonhard Euler 1707–1783), og om Bernoullis likning som en videre tilrettelegging av Eulers likning dersom visse betingelser er oppfylt (Daniel Bernoulli 1700–1782), og nå skal vi se at Toricellis lov følger fra Bernoullis likning. Dog ble Toricellis lov først oppdaget uten hjelp av Newton/Euler/Bernoulli.

Analogi fra "knirkemekanikk"

Vi slipper en ball med masse m som holdes i ro i en høyde h over bakken. Ballen treffer bakken med en fart v. Dersom vi kan se bort fra friksjon i luft, og at ballens bevegelse vil sette lufta i bevegelse, så må den opprinnelige potensielle energien mgh være lik den kinetiske energien ved nedslag $\frac{1}{2}mv^2$. Dette gir at nedslagsfarten er

$$v = \sqrt{2gh} \tag{1}$$

uavhengig av ballens masse.

Oppsummering av Eulers og Bernoullis likninger

Vi starter med Eulers likning

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{k} \tag{2}$$

hvor vi har antatt at z-aksen peker vertikalt oppover.

For å utlede Bernoullis likning gjorde vi tre antakelser:

1. Ideelt fluid, dvs. ingen friksjon, i praksis betyr dette at Eulers likning gjelder.
2. Stasjonært felt, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$.
3. Konstant tetthet, dvs. ρ har alltid samme konstante verdi overalt.

(Det går an å generalisere til ikke konstant tetthet, men vi skal ikke gjøre det her.)

Vi har tidligere vist at dette leder til likninga

$$\nabla \mathcal{B} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c} \tag{3}$$

hvor $\boldsymbol{c} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ er virvlinga til hastighetsfeltet, og hvor vi til ære for Daniel Bernoulli har introdusert notasjonen

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz. \tag{4}$$

Nå har vi to alternativer:

1. Dersom hastighetsfeltet er virvelfritt, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, så vil $\mathcal{B}$ ha samme konstante verdi overalt.

2. For vilkårlig virvling prikker vi likning (3) med et infinitesimalt kurveelement $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ langs en strømlinje. Høyresiden kan da skrives $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{c} = 0$ fordi vi husker at strømlinjer er løsning av differensiallikninga $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Vi står da igjen med det totale differensialet $\nabla \mathcal{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\mathcal{B} = 0$, så $\mathcal{B}$ er konstant langs en strømlinje.

Vi har nå utledet Bernoullis likning

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konstant langs en strømlinje} \tag{5}$$

NB! For virvling ulik null vil konstanten være ulik langs forskjellige strømlinjer. Bernoullis likning forteller oss ikke hvordan konstanten endres mellom strømlinjer! For å avklare hvordan $\mathcal{B}$ endrer sin verdi mellom strømlinjer må vi løse (3) direkte.

Vann som renner ut av et åpent kar

Vårt kar er en vertikal sylinder med diameter D, åpent i toppen og lukket i bunnen. Gjennom bunnen er det boret et lite utløpshull med diameter d.

Den frie overflaten er i kontakt med luft i en høyde h over bunnen. Overflaten synker med synkefart V, og vi innser relasjonen mellom h og V

$$V = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

Det kan innvendes at med en fri overflate som synker så har vi ikke stasjonære betingelser, dog skal vi anta at overflaten synker så langsomt at vi i praksis betrakter eksperimentet som stasjonært.

Vannet renner ut av utløpshullet med fart v hvor det umiddelbart kommer i kontakt med luft.

Kontinuitetslikninga er

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{7}$$

og med antakelsen om konstant tetthet har vi divergensfri hastighet $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Dersom dette integreres i et volumintegral over alt vann i karet, og vi anvender Gauss sats, får vi at den integrerte volumfluksen gjennom overflaten er lik den integrerte volumfluksen gjennom utløpshullet

$$V\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = v\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2. \tag{8}$$

Så velger vi en strømlinje fra overflaten ved $z = h$ til utløpshullet $z = 0$ og innser at vi har lufttrykk $p = p_0$ begge steder. Følgelig gir Bernoullis likning at

$$\frac{v^2}{2} = \frac{V^2}{2} + gh. \tag{9}$$

Dersom vi substituerer inn (8) får vi

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} \approx \sqrt{2gh}. \tag{10}$$

Tilnærmingen er meget god for vårt eksperiment, med $D = 17$ cm og $d = 1$ cm begår vi en feil i femte siffer!

Vi har nå utledet Toricellis lov $v = \sqrt{2gh}$. Det er egentlig ganske pussig at vi ender opp med samme resultat som fallfarten til en ball i likning (1)!

Dersom vi uttrykker Toricellis lov ved hjelp av synkefarten istedenfor utløpsfarten, og vi benytter relasjonen (6) for å eliminere V, ender vi opp med den separable differensiallikninga

$$-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\left(\frac{D}{d}\right)^2 = \sqrt{2gh}. \tag{11}$$

Dersom vi integrer fra tiden t_0 med høyde h_0 til tiden t_1 med høyde h_1

$$\int_{h_0}^{h_1} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2g}\left(\frac{d}{D}\right)^2 \mathrm{d}t \tag{12}$$

ender vi til slutt opp med

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{D}{d}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right) \tag{13}$$

eller

$$\Delta h = \sqrt{2gh_0}\frac{d}{D}\Delta t - \frac{g}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^2 (\Delta t)^2 \tag{14}$$

hvor $\Delta h = h_0 - h_1$ og $\Delta t = t_1 - t_0$.

Demonstrasjonsforsøk: Målingene er lagt inn i et regneark `Toricelli.xls`. Beregning I er første ledd på høyre side av (14), beregning II er summen av begge ledd på høyre side av (14), avvik er relativ differanse mellom beregnet og målt Δh.

y

Eksperiment man kan gjøre hjemme: Verifiser hvor lang tid det tar å tømme badekaret ditt! Dersom veggene i badekaret er vertikale burde det være lett å tilpasse likning (13).

NB! Høydene h_0 og h_1 må måles relativt til der hvor utløpsvannet kommer i kontakt med luft! Derfor er det kanskje ikke så lett å tilpasse likning (13) likevel, for de færreste av oss har vel et badekar som slipper vannet rett ut på gulvet? Kan du tenke deg hvordan du kan generalisere utledningen for at den skal kunne brukes for ditt badekar?

Formen til overflaten til roterende vann

Vi vet alle at dersom vi rører rundt vannet i en kopp slik at det roterer som en karusell, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, så vil overflaten ha krumning oppover, med laveste punkt i midten og høyest langs veggene til koppen. Vi viste at overflaten har formen til en paraboloide, $\eta(r) \propto r^2$ hvor r er avstanden til rotasjonsaksen. Dette gjorde vi ved å løse Eulers likning (2) direkte. Vi kunne ikke finne denne løsningen ved å benytte Bernoullis likning (5) fordi strømlinjene er sirkler rundt rotasjonsaksen, og hastighetsfeltet har virvling $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{\omega}$, så Bernoullis likning kan kun brukes rundt hver sirkel og ikke på tvers av sirklene slik vi ønsker!

For å kunne bruke Bernoullis likning for å finne overflaten til vann i roterende bevegelse er vi begrenset til virvelfri bevegelse, som i praksis tilsvarer det vi ser når vi tapper vann ut av en vask eller et badekar hvor det er litt rotasjon i vannet.

Vi skal nå vise hvordan vi kan løse problemet mer generelt ved å gå rett løs på likning (3) for roterende bevegelse med vilkårlig virvling. I det følgende bruker vi sylinderkoordinater som vi ennå ikke har gjennomgått, men en tilstrekkelig oppsummering står på formelarket som deles ut på eksamen.

Vi antar at hastighetsfeltet er en rendyrket sirkelbevegelse rundt rotasjonsaksen og at farten kun avhenger av avstanden til rotasjonsaksen

$$\boldsymbol{v} = v(r)\boldsymbol{i}_\theta. \tag{15}$$

Virvlinga er da (se formelarket)

$$\boldsymbol{c} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\,\boldsymbol{k}. \tag{16}$$

Videre finner vi at høyresiden i likning (3) blir

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c} = \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\,\boldsymbol{i}_r. \tag{17}$$

Dersom vi antar at $\mathcal{B}$ kun kan avhenge av radiell avstand r og vertikal koordinat z så har vi

$$\nabla\mathcal{B} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{18}$$

Vi løser likning (3) komponentvis og får

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} = \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) \tag{19}$$

og

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} = 0. \tag{20}$$

Den siste likninga viser imidlertid at $\mathcal{B}$ ikke kan være en funksjon av z.

La oss nå anta en enkel form for farten

$$\boldsymbol{v} = v(r)\boldsymbol{i}_\theta = \alpha r^n \boldsymbol{i}_\theta \tag{21}$$

hvor n er en vilkårlig potens. Først ser vi at virvlinga er

$$\boldsymbol{c} = \alpha(n+1)r^{n-1}\boldsymbol{k}. \tag{22}$$

Dersom dette settes inn i (19) finner vi at

$$\mathcal{B} = \begin{cases} \frac{n+1}{2n}\alpha^2 r^{2n} + \beta & \text{for } n \neq 0 \\ \alpha^2 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) & \text{for } n = 0 \end{cases} \tag{23}$$

hvor β og r_0 er to vilkårlige konstanter.

Nå vet vi imidlertid at på overflaten $z = \eta(r)$ må trykket være lik det konstante lufttrykket $p = p_0$, og følgelig har vi der når vi setter inn i likning (4)

$$\mathcal{B} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{\alpha^2 r^{2n}}{2} + g\eta. \tag{24}$$

Dersom de siste to likningene settes lik hverandre får vi formen til overflaten

$$\eta(r) = \begin{cases} \frac{\alpha^2 r^{2n}}{2ng} + \gamma & \text{for } n \neq 0 \\ \frac{\alpha^2}{g} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) & \text{for } n = 0 \end{cases} \tag{25}$$

hvor γ og r_1 er to vilkårlige konstanter som kan bestemmes for eksempel med tanke på å kreve at det skal være et bestemt volum vann i koppen.

La oss først se på fortegnet til virvlinga:

- For $n < -1$ er virvlinga orientert motsatt den makroskopiske rotasjonsbevegelsen (retrograd).
- For $n = -1$ er hastigheten virvelfri.
- For $n > 1$ er virvlinga orientert samme vei som den makroskopiske rotasjonsbevegelsen (prograd).

I lys av dette, hvilken vei ville en bevisstløs mygg ha rotert rundt seg selv dersom den hadde blitt fraktet rundt av den makroskopiske bevegelsen?

Vi ser at løsningen har følgende egenskaper:

- For $n < 0$ har hastigheten en singularitet i origo ($|\boldsymbol{v}| \to \infty$), overflaten er singulær i origo ($\eta \to -\infty$) og krummer ned og blir asymptotisk horisontal langt vekk fra origo.
- For $n = 0$ er hastigheten endelig og diskontinuerlig i origo, overflaten er singulær i origo ($\eta \to -\infty$) og krummer ned og går mot uendelig langt vekk fra origo ($\eta \to \infty$).
- For $0 < n < \frac{1}{2}$ er hastigheten lik null i origo, overflaten har et endelig bunnpunkt i origo og har formen som en spiss som peker ned, overflaten krummer ned og går mot uendelig langt vekk fra origo ($\eta \to \infty$).
- For $n = \frac{1}{2}$ er hastigheten lik null i origo, overflaten har et endelig bunnpunkt i origo og har formen som et rett kremmerhus (uten krumning) med spiss som peker ned, overflaten går mot uendelig langt vekk fra origo ($\eta \to \infty$).

- For $n > \frac{1}{2}$ er hastigheten lik null i origo, overflaten har et endelig bunnpunkt i origo og har formen som en glatt skål som krummer opp og går mot uendelig langt vekk fra origo ($\eta \to \infty$).

Og så bemerker vi de to standard løsningene vi kjente til fra før:

- For $n = -1$ er hastigheten virvelfri og overflaten har formen $\eta(r) \propto r^{-2}$.
- For $n = 1$ har vi rotasjon som en karusell og overflaten har formen $\eta(r) \propto r^2$ som er en paraboloide.

Vi kan nå faktisk bruke formen på overflaten som et direkte mål for virvlinga!

Demonstrasjonsforsøk: Se på disse bildene og videoen fra eksperimentet og prøv å avsløre hva virvlinga er forskjellige steder i vannet ved å foreta en visuell kurvetilpasning for å bestemme potensen n i overflatehevningen $\eta(r) \propto r^{2n}$!

Kan du gjenkjenne at overflaten på rotasjonsaksen enten er singulær (i så fall er det ikke vann der i det hele tatt), eller en skarp spiss som peker ned, eller en glatt skål?

Kan du gjenkjenne at overflaten enten krummer ned eller opp?

Kan det stemme at vannet stort sett kan betraktes som virvelfritt bortsett fra nær rotasjonsaksen?

Merk: Det framkommer fra bildene og videoen at potensen n antakelig må betraktes som en funksjon av r, og det framkommer dessuten at overflaten antakelig må betraktes som en funksjon av både vinkelen θ og tiden t. Derfor er antakelsene i likning (21) ikke helt riktige, men likevel et godt utgangspunkt for å lage en enkel modell!

Takk til Jon Kristian Dahl for bildene og videoen!