Forelesning 7/2–2017

Rotasjon som fast legeme

Repetisjon fra sist: Rotasjon som fast legeme betyr at et sett med punkter som opprinnelig er i visse avstander fra hverandre vil fortsette å være i de samme avstandene fra hverandre mens de roterer. Vinkelhastighetsvektor $\boldsymbol{\omega}$ er orientert langs rotasjonsaksen. Dersom vi lar origo ligge langs rotasjonsaksen, så vil hastigheten til et punkt med posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ være

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Vi definerer begrepet "nord" som en angivelse av en rotasjonsbevegelse:

> Legg de fire fingrene på høyre hånd langs rotasjonsbevegelsen, da peker høyre tommel i $\boldsymbol{\omega}$ sin retning og tuppen på tommelen er "nord".

Akselerasjonen til et punkt med posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ vil være

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right).$$

Dersom vinkelhastigheten er konstant så er det kun posisjonsvektor som skal deriveres

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r} - \omega^2 \boldsymbol{r}.$$

Eksempel: Hvilken vei beveger vi oss og hvilken vei er vi akselerert?

Finn retning mot nord, hvordan står jordas rotasjonsakse orientert, og hvordan står jorda sin $\boldsymbol{\omega}$-vektor orientert? Finn vår hastighet, og finn vår akselerasjon! Hint: Vi er akselerert vinkelrett inn mot rotasjonsaksen til jorda.

Kurveintegral

Dette burde være kjent fra MAT1110.

Vi har et vektorfelt $\boldsymbol{v}$ som skal integreres langs en kurve γ. Kurven er parameterisert av parameter t (vi kan tenke oss at t er tid, men parameteren trenger ikke å være tid). I løpet av tiden fra t til $t + \Delta t$ forflytter vi oss langs kurven $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \approx \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Delta t$. I grensen at $\Delta t \to 0$ skriver vi $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$.

Vi skal nå være interessert i å regne ut kurveintegral av typen

$$\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

langs en kurve γ.

Eksempel: arbeid = kraft ganger vei

Vi vet at for rettlinjet bevegelse $\Delta\boldsymbol{r}$ med konstant kraft $\boldsymbol{F}$ så vil arbeidet utført av krafta være $W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$. Det er greit å ha klart for seg de fysiske enhetene: arbeid er energi og måles i Joule (J), kraft måles i Newton (N) og vei måles i meter (m).

Dersom krafta ikke er konstant, eller veien ikke er rett, så vil uttrykket for arbeid bli uttrykt ved kurveintegralet

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

To spørsmål om kurveintegraler

Dersom kurven starter i et punkt $\boldsymbol{r}_0$ og ender opp i et annet punkt $\boldsymbol{r}_1$, så er det mange veier for å komme seg fra $\boldsymbol{r}_0$ til $\boldsymbol{r}_1$, og det er mange måter å parameterisere hver vei:

- Gir forskjellige veier samme svar?
- Gir forskjellige parameteriseringer av samme vei samme svar?

Kurveintegralet langs en gitt vei avhenger ikke av parameteriseringen

LH setning 3.3.6 sier at to parameteriseringer av samme kurve skal gi samme svar for kurveintegralet.

Eksempel: La $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ og la γ være x-aksen fra $x = 0$ til $x = 2$.
Parameterisering 1: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i}$ for $0 \le t \le 2$
Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{v} = t\boldsymbol{i}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^2 t\,\mathrm{d}t = 2$.
Parameterisering 2: $\boldsymbol{r}(t) = 2t^2\boldsymbol{i}$ for $0 \le t \le 1$
Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 4t\boldsymbol{i}\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{v} = 2t^2\boldsymbol{i}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^1 8t^3\,\mathrm{d}t = 2$.
At vi får samme svar stemmer med LH setning 3.3.6.

Eksempel: La $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ og la γ være halvsirkelen med sentrum i $(x = 1, y = 0)$ fra origo til $(x = 2, y = 0)$ i øvre halvplan. Dette er altså samme vektorfelt som ovenfor, og samme start- og endeunkt for integralet, men kurven går en annen vei.
Parameterisering: $\boldsymbol{r}(t) = (1 - \cos t)\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}$ for $0 \le t \le \pi$

Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{v} = (1 - \cos t)\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = 2$.

I dette eksemplet ser vi at samme vektorfelt $\boldsymbol{v}$ gir samme kurveintegral mellom to punkter for forskjellige veier mellom punktene.

Eksempel: La $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ og la oss integrere fra origo til $(x = 2, y = 0)$ langs to forskjellige veier:
Vei 1: x-aksen fra $x = 0$ til $x = 2$, velg parameterisering $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i}$ for $0 \le t \le 2$
Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i}\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{v} = t\boldsymbol{j}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$.
Vei 2: halvsirkelen med sentrum i $(x = 1, y = 0)$ fra origo til $(x = 2, y = 0)$ i øvre halvplan, velg parameterisering $\boldsymbol{r}(t) = (1 - \cos t)\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}$ for $0 \le t \le \pi$

Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{v} = -\sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j}$ og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^\pi (\cos t - 1)\,\mathrm{d}t = -\pi$.

I dette eksemplet ser vi at samme vektorfelt gir forskjellig svar når kurveintegralet mellom de samme to punktene går langs forskjelige veier mellom punktene.

Eksemplene ovenfor illustrerer at kurveintegralet mellom to punkter kan avhenge av vei, men ikke av parameterisering.

Definisjon av sirkulasjonen

Sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ er rundt en lukket kurve γ er gitt ved kurveintegralet

$$C = \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Sirkelen rundt integraltegnet indikerer at kurven γ er en lukket kurve.

Vi skal nå definere hva vi mener med et "konservativt" vektorfelt. Vi har imidlertid den noe spesielle situasjonen at våre tre lærebøker definerer dette på tre forskjellige måter:

- M (s.28): $\boldsymbol{v}$ er konservativ dersom sirkulasjonen $\oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er lik null for en vilkårlig lukket kurve γ.
- GF (s.93): $\boldsymbol{v}$ er konservativ dersom kurveintegralet mellom to punkt er uavhengig av veien mellom punktene, $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, hvor γ_1 og γ_2 er to kurver som går mellom samme start- og sluttpunkt.
- LH (s.202): $\boldsymbol{v}$ er konservativ dersom den kan skrives som gradienten til en skalar, $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$, vi sier at ϕ er et skalarpotensial.

Vi skal etterhvert vise at alle disse er ekvivalente, og det kommer i tillegg en fjerde variant som også er ekvivalent.

Eksempel: Er tyngdekraften $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ konservativ?

Her er m en masse som er utsatt for tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$. Her skal vi ta den enkleste representasjonen av tyngdekraft, nemlig at tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ er konstant innenfor et avgrenset område.

La oss prøve GF sin definisjon: Skriv først $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$ hvor x og y-aksene er horisontale og z-aksen peker vertikalt oppover. La γ være en kurve fra et punkt $\boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ til et punkt $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$. Vi trenger ikke parameterisere kurven i det hele tatt, vi trenger kun å bruke $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$, som gir $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{z_0}^{z_1} -mg\,\mathrm{d}z = mg(z_0 - z_1)$.

Kurveintegralet avhenger kun av start- og sluttpunkt, følgelig vet vi at tyngdekraften er konservativ.

Er friksjonskraft konservativ?

La oss anta at vi er utsatt for en friksjonskraft som kan beskrives ved formelen $\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v}$ hvor $\mu > 0$ er en friksjonskoeffisient og $\boldsymbol{v}$ er hastigheten vi beveger oss med.

I dette tilfellet kan vi prøve M sin definisjon: La tiden t være parameter for en lukket kurve γ som vi skal bevege oss langs, $\boldsymbol{r}(t)$. Hastigheten er $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, derfor har vi at $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$. Følgelig må vi regne ut sirkulasjonsintegralet $\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint -\mu|\boldsymbol{v}|^2\,\mathrm{d}t < 0$.

Sirkulasjonen er alltid negativ fordi integranden alltid er negativ, følgelig vet vi at friksjonskraft ikke er konservativ!

(men friksjonskraft er mer problematisk enn som så, det skal vi se på neste gang)