11. april 2017

MEK1100

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 27. april 2017, klokken 14:30 i Devilry (https://devilry.ifi.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (7. etasje i Niels Henrik Abels hus, e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Hver deloppgave gir maksimalt 10 poeng. I alt kan du oppnå 70 poeng. Vi krever minimum 70 % eller 49 poeng for å få obligen godkjent.

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi anvende det vi har lært i kurset for å analysere et datasett målt i Hydrodynamisk laboratorium ved Matematisk institutt. Eksperimentet er motivert fra en typisk problemstilling innen olje- og gassindustrien: transport av gass fra et reservoar på havbunnen gjennom et rør til et anlegg på land, se figurene øverst på side 21 i introduksjonen til kurset vårt intro2017.pdf. I praksis betyr dette at en blanding av olje, vann og gass vil strømme gjennom røret. Dette er svært utfordrende fordi det gjerne inntreffer en "urskog" av ulike strømningsregimer som påvirker evnen til å transportere gass i røret.

Eksperimentet ble gjort i røret som kan sees på høyre side av det øverste bildet på vevsiden som beskriver Hydrodynamisk laboratorium ved Matematisk institutt www.mn.uio.no/math/english/research/about/infrastructure. Samme rør kan også sees i den nederste figuren på side 21 i introduksjonen til kurset vårt intro2017.pdf. Nylig var det også et oppslag i titan.uio.no om denne forskningsaktiviteten.

I eksperimentet ble det benyttet vann og luft. Lufta beveger seg betydelig raskere enn vannet (luftas fart omlag 2.0 m/s, vannets fart omlag 0.1 m/s) og dette kan føre til dannelsen av bølger på skilleflaten mellom luft og vann. Bølgene kan deretter føre til dannelsen av virvler i lufta etter at den har passert en bølgetopp.

Målingene ble gjort med såkalt "Particle Imaging Velocimetry" PIV: Man bruker en laser til å lage et "lysark" inni røret, dette lysarket er vårt xy-plan, med x-aksen i lengderetningen til røret rettet i strømningsretningen og y-aksen vertikalt oppover. Lysarket går gjennom senterlinja til røret. Røret har sirkulært tverrsnitt med radius 5 cm. Det tilsettes sporstoffer i fluidene (vanndråper i lufta og polyamidpartikler i vannet) som kan avbildes av to høyhastighetskameraer som ser lysarket fra siden, det ene kameraet på skrå nedover fra lufta mot vannet og det andre kameraet på skrå oppover fra vannet mot lufta. Dette gjør oss i stand til å måle hastighetsfeltet med god oppløsning over hele lysarket. Merk dog at vi kun måler hastighetskomponentene u i x-retning og v i y-retning. Det fulle hastighetsfeltet er $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$, men vi måler altså ikke hastighetskomponenten w i z-retning på tvers av lysarket.

Det er lagt ut en video av strømningen på Dropbox. Det er også lagt ut en powerpointpresentasjon med øyeblikksbilder tatt med høyhastighetskameraene. Bildene markert "Gas-Phase" er tatt på skrå nedover fra luft mot vann. Bildene markert "Liq-Phase" er tatt på skrå oppover fra vann mot luft. I disse fotografiene angir den røde kurven skilleflaten mellom vann og luft i lysarket. Vi ser også hvor skilleflaten møter rørveggen på den siden som vender mot kameraene. Det er tildels betydelig bølgeaktivitet som skjer på tvers av røret som vi ikke fanger opp med PIV begrenset til lysarket. En anelse om hva slags fenomener som skjer på tvers av røret kan vi se både i videoen og i fotografiene.

I denne oppgaven skal vi se vi på øyeblikksbildene av eksperimentet angitt med "imnr 12" i powerpointpresentasjonen.

a)

Dessverre var det problemer med kvaliteten til dataene som ble lagt ut før 6.april. Sørg derfor for å laste ned dataene på nytt!

Last ned fila `data.mat` og les den inn Matlab/Octave/Python. Hvordan dette kan gjøres er forklart i appendiks A.

Fila inneholder fire matriser x, y, u, v og to vektorer xit, yit. Sjekk at hver matrise har 194 punkter i x-retning og 201 punkter i y-retning, tilsammen blir det 38994 punkter i xy-planet. Sjekk at de to vektorene har 194 punkter i x-retning. Hvordan man sjekker dette er forklart i appendiks B.

Matrisene x og y inneholder x- og y-koordinatene i xy-planet. Matrisene u og v inneholder to av komponentene til hastighetsfeltet. Vektorene xit og yit inneholder posisjonen til skilleflaten i xy-planet. Sjekk at griddet i xy-planet er regulært med intervall 0.5 mm i begge retninger, og at y-koordinatene spenner ut hele diameteren til røret.

b)

Lag konturplott for å illustrere farten for hastighetskomponentene i xy-planet $\sqrt{u^2 + v^2}$. Dette kan lages med `contourf` som fyller ut med farger mellom konturlinjene. Legg til `colorbar` for å vise hvilke verdier som svarer til hver farge. Sørg for å tegne inn posisjonen til skilleflaten i samme plott, dette kan gjøres ved å bruke en serie med $*$ i en farge som skiller seg ut fra konturplottet.

Vi insisterer på å se strukturen i både gassfasen og væskefasen. Dette er vanskelig å få til i samme plott fordi lufta har mye større fart enn vannet. Det kan derfor være nødvendig å lage to konturplott, med hver sine manuelt angitte nivåer, for å synliggjøre strukturen i gassfasen væskefasen hver for seg.

c)

Lag et vektor pil plott med hastigheten i xy-planet $u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$. Dette kan lages med `quiver`. Vi ønsker at plottet skal gi nyttig informasjon, og ettersom det opplagt ikke er fornuftig å plotte 38994 piler i samme plott vil det lønne seg å velge kun et utvalg av disse. Kanskje det er en idé å plotte ei pil for hvert tiende punkt langs x- og y-aksene? Se kompendiet kapittel 3.2.3 hvordan man kan lage et slikt utvalg.

I denne oppgaven skal vi betrakte tre mindre områder i hastighetsfeltet. Vi skal se på rektangler som er definert ved indeksene i motsatte hjørner (`ix`,`iy`)[1]: rektangel 1 $(35, 160)$ og $(70, 170)$, rektangel 2 $(35, 85)$ og $(70, 100)$, rektangel 3 $(35, 50)$ og $(70, 60)$.[2] Marker rektanglene med linjer i figuren. Bruk forskjellige farger for hver side i rektanglene: rødt nede (side 1), grønt på høyre side (side 2), blått oppe (side 3) og svart på venstre side (side 4).

Sørg for å tegne inn posisjonen til skilleflaten i samme plott (se punkt b). Legg merke til at to av rektanglene ligger gassfasen og ett av rektanglene ligger i væskefasen.

---

[1] Her er indeksene skrevet som en vanlig matematisk tekst, med x før y, hvordan dette skrives på datamaskin er forklart i appendiks B.

[2] Disse indeksverdiene gjelder for Matlab/Octave, for Python må de reduseres med én.

d)

Regn ut divergensen til $u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$. Forklar hvorfor dette ikke er lik divergensen til $\boldsymbol{v}$. Lag konturplott av divergensen (du kan bruke `contourf`) slik at strukturen kommer tydelig fram i både gass- og væskefasen. Bruk `colorbar` for å vise hvilke verdier som svarer til hver farge. Sørg for å tegne inn skilleflaten (se punkt b) og rektanglene (se punkt c) i samme plott.

Vi kan med god nøyaktighet anta at både gassen og væska er inkompressible fordi strømingen er betydelig langsommere enn lydhastigheten i luft og i vann. Forklar hvilken konsekvens dette har for divergensen til $\boldsymbol{v}$ og hva vi i så fall kan si om hastighetskomponenten w som vi ikke har målt!

e)

Regn ut den komponenten av virvlinga til $\boldsymbol{v}$ som står normalt på xy-planet. Lag konturplott av denne virvlingskomponenten (du kan bruke `contourf`) slik at strukturen kommer tydelig fram i både gass- og væskefasen. Bruk `colorbar` for å vise hvilke verdier som svarer til hver farge. Sørg for å tegne inn skilleflaten (se punkt b) og rektanglene (se punkt c) i samme plott.

f)

Nå skal vi anvende Stokes eller Greens sats på rektanglene. Regn ut sirkulasjonen direkte som kurveintegral rundt rektanglene. Regn ut det samme som flateintegral over rektanglene. Diskuter om du får samme resultat! Diskuter forskjellen mellom de tre rektanglene!

Husk at hastighetsfeltet er en måling som kan inneholde målefeil og at du har begrenset oppløsning i griddet.

For å få en bedre forståelse av sirkulasjonen skal du angi verdien til kurveintegralene langs hver side av rektanglene. Passer disse resultatene med hva du hadde forventet når du ser på hastighetsfeltet i området?

g)

Nå skal vi anvende Gauss sats på rektanglene. I utgangspunktet skulle man tro det var problematisk å bruke Gauss sats når vi ikke kjenner hastighetskomponenten w. Merk imidlertid at vi med god tilnærming kan anta at strømningen i dette eksperimentet er inkompressibel fordi hastighetene vi måler er betydelig mindre enn lydhastigheten. Følgelig kan vi forutsette at $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ for det fulle hastighetsfeltet $\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$.

Regn ut den den integrerte fluksen av hastighetsvektoren $u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$ ut av sidene av rektanglene orientert langs xy-planet. Gjør dette direkte som kurveintegral rundt rektanglene. Diskuter hvilken implikasjon disse svarene har for den integrerte fluksen over rektanglene orientert i z-retning.

For å få en bedre forståelse av fluksen skal du angi verdien til kurveintegralene langs hver side av rektanglene. Passer disse resultatene med hva du hadde forventet når du ser på hastighetsfeltet i området?

A Hvordan lese MAT-filer i Matlab og Octave og Python

Dessverre var det problemer med kvaliteten til dataene som ble lagt ut før 6.april. Sørg derfor for å laste ned dataene på nytt!

Datafila `data.mat` er en versjon 7 MAT-fil. Datafila `data73.mat` er en versjon 7.3 MAT-fil. Matlab/Octave ser ikke ut til å bry seg om hvilken versjon MAT-fila har. Python ser derimot ut til å være følsom for MAT-fila sin versjon avhengig av måten man leser inn dataene!

Det burde ikke være nødvendig å sette seg inn i de forskjellige MAT-fil versjonene.

Det er enkelt å lese inn dataene i Matlab/Octave med kommandoen `load("data.mat")`. Våre variable er da tilgjenglige som `x`, `y`, `u`, `v`, `xit` og `yit`.

Den enkleste måten å lese inn dataene i Python er (takk til Noah Oldfield og Lars Willas Dreyer):

```
import scipy.io as sio
# Dette ser ut til å virke med versjon 7 MAT-filer
data = sio.loadmat("data.mat")
x = data.get("x")
y = data.get("y")
u = data.get("u")
v = data.get("v")
xit = data.get("xit")
yit = data.get("yit")
```

Det finnes minst to alternative måter å lese inn dataene i Python.
Første alternativ er:

```
import tables
# Dette ser ut til å virke med versjon 7.3 MAT-filer
file = tables.openFile("data73.mat")
x = transpose(file.root.x[:])
y = transpose(file.root.y[:])
u = transpose(file.root.u[:])
v = transpose(file.root.v[:])
xit = transpose(file.root.xit[:])
yit = transpose(file.root.yit[:])
file.close()
```

Andre alternativ er:

```
import h5py
# Dette ser ut til å virke med versjon 7.3 MAT-filer
file = h5py.File("data73.mat", "r")
X = file["x"]
Y = file["y"]
```

```
U = file["u"]
V = file["v"]
Xit = file["xit"]
Yit = file["yit"]
x = transpose(X[:,:])
y = transpose(Y[:,:])
u = transpose(U[:,:])
v = transpose(V[:,:])
xit = transpose(Xit[:])
yit = transpose(Yit[:])
file.close()
```

Legg merke til at vi har transponert dataene i de to siste Python-måtene, men ikke i den første Python-måten! Tilsvarende transponering finner du også i kapittel 5.8 i oversettelsen fra Matlab til Python av meteorologi-eksemplet.

B Indeksering av matriser

Det er trykkfeil i kompendiet kapittel 5 som forvirrer med hensyn til størrelse og indeksering av matriser i Matlab, sørg for å se på forslag til rettinger i kompendiet!

La oss betrakte den vertikale hastighetskomponenten v som er avhengig av horisontal posisjon x og vertikal posisjon y. I vanlig matematisk tekst hadde vi skrevet $v(x, y)$ for å angi verdien til v for en gitt posisjon (x, y).

Vi ønsker å implementere dette på datamaskinen slik at `v` er en matrise som inneholder diskrete verdier til v i et rutenett med `nx` punkter i x-retning og `ny` punkter i y-retning. La `ix` være en indeks som løper over de `nx` punktene i x-retning, og la `iy` være en indeks som løper over de `ny` punktene i y-retning.

For å finne ut hvor stor matrisen `v` er kan vi bruke Matlab/Octave-kommandoen `size` eller Python-kommandoen `shape`. Det viser seg i så fall at både Matlab/Octave og Python med `scipy.io`-måten vil gi `ny`-verdien først, og deretter `nx`-verdien. Derimot viser det seg at Python med de to andre måtene hadde gitt størrelsene i motsatt rekkefølge dersom vi ikke hadde transponert dataene!

For å indeksere matrisen `v` skriver vi i Matlab/Octave `v(iy,ix)` eller i Python med `scipy.io`-måten `v[iy,ix]`. Derimot ser det ut til at vi i Python med de to andre måtene måtte ha skrevet indeksene i motsatt rekkefølge dersom vi ikke hadde transponert dataene!