Fasit for avsluttende eksamen i MEK1100 gitt 5 juni 2018

Oppgave 1

1a

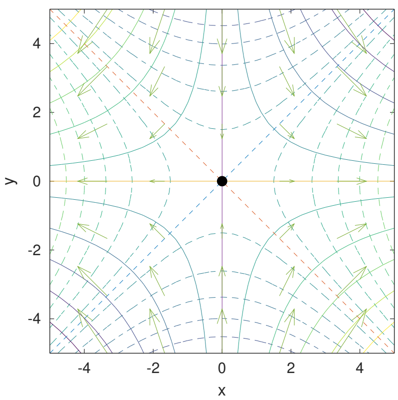
Divergens $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$.
Virvling $\nabla \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

1b

Feltet er virvelfritt så vi vet at det eksisterer et skalarpotensial ϕ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$.
$\phi = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \alpha$ hvor α er en vilkårlig konstant.
(Det er akseptabelt å velge motsatt fortegn i definisjonen for skalarpotensial.)

Feltet er divergensfritt og 2D så vi vet at det eksisterer en strømfunksjon ψ slik at $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \nabla\psi = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{j}$.
$\psi = -xy + \beta$ hvor β er en vilkårlig konstant.
(Det er akseptabelt å velge motsatt fortegn i definisjonen for strømfunksjon.)

1c



1d

Sirkelen kan parametriseres med vinkelen $\boldsymbol{r}(\theta) = \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta$ for $0 \le \theta < 2\pi$.
Sirkulasjonen er lik 0.
Samme svar med Stokes sats, må integrere virvlinga som er lik 0.

Oppgave 2

2a

$\alpha \sim \mathrm{m}^{-2}$ $\qquad \kappa \sim \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ $\qquad k \sim \mathrm{J}/(\mathrm{s\ m\ K})$ $\qquad \boldsymbol{H} \sim \mathrm{J}/(\mathrm{s\ m}^2)$ $\qquad T_0 \sim \mathrm{K}$

2b

$$\text{Varmefluksstetthet:} \qquad \boldsymbol{H} = -k\nabla T = 2\alpha k T_0 r \mathrm{e}^{-\alpha r^2}\boldsymbol{i}_r$$

$$\text{Integrert varmefluks:} \qquad \int_{r=R} \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{i}_r \,\mathrm{d}\sigma = 8\pi\alpha k T_0 R^3 \mathrm{e}^{-\alpha R^2}$$

Den integrerte fluksen kan også regnes ut som et volumintegral ved hjelp av Gauss sats, men det er mye mer tungvint.

2c

Varmelikninga sier $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\nabla^2 T$, følgelig øker/avtar temperaturen der hvor $\nabla^2 T$ er positiv/negativ.

$$\nabla^2 T = \nabla\cdot\nabla T = -2\alpha T_0(3-2\alpha r^2)\mathrm{e}^{-\alpha r^2}$$

Temperaturen øker for $r > \sqrt{\frac{3}{2\alpha}}$ og avtar for $r < \sqrt{\frac{3}{2\alpha}}$.

Oppgave 3

3a

Divergens $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$.
Virvling $\nabla\times\boldsymbol{v} = \dfrac{3c}{2\sqrt{r}}\boldsymbol{k}$.

3b

Strømlinjer kan finnes på to måter:
Enten: Ved å løse $\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_r c\sqrt{r}\,\mathrm{d}z - \boldsymbol{k}c\sqrt{r}\,\mathrm{d}r = \boldsymbol{0}$ som har løsning $z =$ konstant og $r =$ konstant, altså sirkler i horisontale plan med z-aksen i sentrum.
Eller: Finn først strømfunksjonen $\psi = \frac{2}{3}cr^{\frac{3}{2}} +$ konstant. Finn deretter strømlinjene $\psi =$ konstant, som gir $r =$ konstant.
Partikkelakselerasjonen kan også finnes på to måter:
Enten: Lokalderivert $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$ (da feltet er stasjonært)
og konvektivt derivert $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -c^2\boldsymbol{i}_r$.
Følgelig er akselerasjonen til en vannpartikkel $\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -c^2\boldsymbol{i}_r$.
Eller: Siden vi vet at bevegelsen skjer med konstant fart i sirkelbaner så vet vi at akselerasjonen er en sentripetalakselerasjon som er $a = v^2/r$ med retning inn mot rotasjonsaksen. Gir samme svar.

3c

Fra Eulers likning $\dfrac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{k}$ finner vi trykket
$p = \rho c^2 r - \rho g z +$ en konstant.

Ved den frie overflaten, $z = \eta(r)$, der hvor vann møter luft, setter vi $p = p_0$ som er det konstante lufttrykket, og finner formen på den frie overflaten

$$\eta(r) = \frac{c^2 r}{g} + \text{en konstant}$$

Vi har funnet at overflaten skal ha formen til et kremmerhus, det stemmer ikke helt med fotografiet, men kanskje det omtrent stemmer i et avgrenset område av fotografiet?