Forelesning 15/2–2019 ved Karsten Trulsen

Eksempler på fluksintegraler
Integrert volumfluks

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma$$

er en skalar som har enhet volum per tid. Volumflukstettheten er hastigheten $\boldsymbol{v}$ (en vektor) som har enhet lengde per tid.

Integrert massefluks

$$\int_S \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma$$

er en skalar som har enhet masse per tid. Masseflukstettheten $\rho\boldsymbol{v}$ er en vektor som har enhet masse per tid og per areal.

Integrert bevegelsesmengdefluks

$$\int_S \rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \int_S (\rho \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}\sigma$$

er en vektor som har enhet bevegelsesmengde per tid, som er det samme som masse ganger lengde per tid i andre. Bevegelsesmengdeflukstettheten er en dyade $\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$ som har enhet masse per tid i andre og per lengde. Det er egentlig ikke nødvendig å sette parenteser inne i integralet, det er gjort her kun for å tydeliggjøre at det er snakk om en fluks av en bevegelsesmengdetetthet, og for å illustrere at det ikke er nødvendig å regne ut det dyadiske produktet $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$ dersom vi omgrupperer regneoperasjonene slik at vi istedenfor regner ut vektor ganger skalar.

Fluks ut av en lukket flate
En flate er lukket dersom den avgrenser et volum. For en lukket flate rundt et avgrenset volum har vi en konvensjon som sier at flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ peker ut av det avgrensede volumet.

Eksempel: Integrert fluks av $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$ ut av overflaten til enhetsterning
La terningen ha utstrekning $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ og $0 \leq z \leq 1$. Den lukkede flaten S splittes opp i sju sider, S_m, og vi nummererer sidene som en vestlig terning (høyrehånds terning med sum 7 på motstående sider).

1. Flaten S_1 er $x = 1$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 1$, den integrerte fluksen ut av flaten er 1.

2. Flaten S_2 er $y = 1$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.

3. Flaten S_3 er $z = 1$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.

4. Flaten S_4 er $z = 0$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.

5. Flaten S_5 er $y = 0$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.
6. Flaten S_6 er $x = 0$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, den integrerte fluksen ut av flaten er 0.

Total integrert fluks blir

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \sum_{m=1}^{6} \int_{S_m} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = 1.$$

Mer generelle flater, parametrisering av en generell flate

Husk at arealet av et parallellogram som spennes ut av to vektorer $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ er gitt ved størrelsen til kryssproduktet $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$, og retningen til kryssproduktet står normalt på flaten $\boldsymbol{n} = \pm \frac{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|}$.

Parametrisering av generelle flater

(LH 3.9, M 2.3.2)

Vi skal se for oss en flate S i rommet. Rommet er tredimensjonalt, mens flaten er todimensjonal, derfor forventer vi at vi kan parametrisere flaten med to skalarer v og w. Hvert punkt på flaten vil da være gitt ved en 3D posisjonsvektor $\boldsymbol{r}(v, w)$ hvor (v, w) befinner seg i et 2D parameterrom.

Vi kan konstruere infinitesimale tangentvektorer til overflaten ved å se på endringen i posisjonsvektor på flaten når kun én av parameterene endrer seg om gangen

$$\Delta \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{r}(v + \Delta v, w) - \boldsymbol{r}(v, w) \approx \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \Delta v$$

$$\Delta \boldsymbol{r}_w = \boldsymbol{r}(v, w + \Delta w) - \boldsymbol{r}(v, w) \approx \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \Delta w$$

Når vi lar endringene i parameterene bli vilkårlig små, $\Delta v \to 0$ og $\Delta w \to 0$, bytter vi om fra Δ til infinitesimal d og vi har eksakt

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\, \mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\, \mathrm{d}w$$

Nå kan vi beregne flatenormalvektor og det infinitesimale flateelementet ved å ta kryssproduktet

$$\boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \pm \mathrm{d}\boldsymbol{r}_v \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \pm \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\, \mathrm{d}v \mathrm{d}w$$

Legg merke til at vi kan finne normalvektor og flateelement hver for seg

$$\mathrm{d}\sigma = |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}|\, \mathrm{d}v \mathrm{d}w$$

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}}{|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}|}$$

Husk at vi har allerede lært en alternativ måte å finne flatenormalvektoren, nemlig dersom vi kan uttrykke flaten som en ekviskalarflate, ved hjelp av en skalarfunksjon $\beta(x, y, z) =$ konstant, så kan enhetsflatenormalvektoren skrives

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|},$$

men dersom vi bruker dette alternativet har vi ingen oppskrift for å finne dσ.

Eksempel: Sirkelskive med radius a i høyde h over xy-planet og med sentrum i z-aksen

La parameterrommet være $0 \leq r \leq a$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt på sirkelskiven kan skrives

$$\boldsymbol{r}(r, \theta) = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\boldsymbol{i} + r\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pm\boldsymbol{k}r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

og herfra kan vi se at $\boldsymbol{n} = \pm\boldsymbol{k}$ og $\mathrm{d}\sigma = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

Vi kunne også ha skrevet skiven som en ekviskalarflate $\beta(x, y, z) = z = h$ og utledet $\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}$.

Eksempel: Sylinder med radius a fra xy-planet og opp en høyde h med z-aksen som senterakse

La parameterrommet være $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq z \leq h$. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt på sylinderen kan skrives

$$\boldsymbol{r}(\theta, z) = a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -a\sin\theta\boldsymbol{i} + a\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \pm a(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

og herfra kan vi se at $\boldsymbol{n} = \pm(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})$ og $\mathrm{d}\sigma = a\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

Vi kunne også ha skrevet sylinderen som en ekviskalarflate $\beta(x, y, z) = x^2 + y^2 = a^2$ og utledet $\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}$. For å innse at vi får samme svar identifiserer vi $x = a\cos\theta$ og $y = a\sin\theta$.

Eksempel: Et terreng med høyde $z = h(x, y)$ over xy-planet

La parameterrommet være xy-planet. Posisjonsvektor til et vilkårlig punkt i terrenget kan skrives

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + h(x, y)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{k}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\left(\boldsymbol{k} - \frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

og herfra kan vi se at $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial x})^2 + (\frac{\partial h}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Vi kunne ha skrevet terrenget som en ekviskalarflate $\beta(x, y, z) = z - h(x, y) = 0$, og herfra kunne vi ha funnet flatenormalvektoren, men vi hadde i så fall ikke hatt noen oppskrift for å finne flateelementet $\mathrm{d}\sigma$.

Flateintegral over generelle flater

Eksempel: Arealet av sirkelskiva ovenfor.

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \pi a^2$$

Eksempel: Arealet av sylinderen ovenfor.

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^h a\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = 2\pi a h$$