Forelesning 19/2–2019 ved Karsten Trulsen

Volumintegral

(M 2.4, se også LH 6.9)

Vi skal ha behov for å integrere et skalarfelt f eller et vektorfelt $\boldsymbol{F}$ over et volum V. Vi kan tenke oss at volumet er delt opp i infinitesimale volumelementer $\mathrm{d}\tau$. Integralene kan være av typen

$$\int_V \boldsymbol{F} \mathrm{d}\tau, \qquad \int_V f \, \mathrm{d}\tau, \qquad \text{etc.}$$

over volumet V.

To typiske eksempler på volumintegraler er massen til et legeme som har volum V og massetetthet ρ,

$$\int_V \rho \, \mathrm{d}\tau,$$

og tyngden til det samme legemet,

$$\int_V \rho \boldsymbol{g} \, \mathrm{d}\tau,$$

hvor $\boldsymbol{g}$ er tyngdens akselerasjon. Legg merke til at massen til et legeme er en skalar, mens tyngden til et legeme er en vektor.

Eksempel: Volumet av en boks med sidekanter a, b og c

La boksen være orientert med sidekant a langs x-aksen, sidekant b langs y-aksen, og sidekant c langs z-aksen. La oss betrakte det infinitesimale volumelementet i kartesiske koordinater $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, og la oss ta x-integralet først og z-integralet sist:

$$\begin{aligned}\int_V \mathrm{d}\tau = \int_0^c \int_0^b \int_0^a \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^c \int_0^b [x]_{x=0}^a \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^c \int_0^b a \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ = \int_0^c [ay]_0^b \, \mathrm{d}z = \int_0^c ab \, \mathrm{d}z = [abz]_0^c = abc\end{aligned}$$

Hydrostatisk trykk og trykkraft

(GF 6.6)

Hydrostatisk trykk

Formelen for hydrostatisk trykk skal vi utlede senere, nå bare skriver vi den opp og aksepterer den inntil videre

$$p = p_0 - \rho g z$$

Her er p trykket, p_0 er referansetrykket ved $z = 0$, ρ er den konstante tettheten til mediet, g er tyngdens akselerasjon og z er høyden langs den vertikale aksen. Med minustegnet i denne formelen ser vi at z-aksen er orientert slik at den peker oppover.

Merk: Det er alltid lurt når vi jobber med hydrostatisk trykk å ta "dykkertesten" for å sjekke at vi har fått fortegnene riktig: Vi vet at dersom vi dykker ned på havets bunn så vil trykket øke. Dersom havets bunn befinner seg et sted i negativ z-retning, så kan vi sette inn stadig større negative verdier for z og se at trykket øker slik det skal.

Dette trykket er *isotropt*. Det betyr at det virker likt i alle retninger.

Trykkraft på en flate

Trykkraften på flate S er

$$\boldsymbol{F} = \int_S -p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

hvor $\boldsymbol{n}$ er enhets normalvektor til flaten S. Minustegnet er en konsekvens av vår konvensjon om at dersom vi betrakter en flate S så skal enhets normalvektoren til flaten peke ut av flaten. Trykkraften vil virke inn mot flaten, og følgelig minustegn.

For å fortså hvorfor denne formelen er riktig kan vi huske på at trykket p er *isotropt*, det virker likt i alle retninger. Dersom en flate blir utsatt for et slikt trykk så vil trykkraften være rettet vinkelrett på flaten.

Eksempel: Bruk en kjøkkenvekt til å måle et volum vann ved å veie vannet: Vis at tyngden av vannet kan måles ved kraften som virker på bunnen av vektskåla.

Merk: Dette eksemplet viser en overgang fra et volumintegral til et flateintegral!

La vannet i vektskåla ha horisontalt tverrsnitt med areal A og vertikal høyde h. Tyngden til vannet er gitt ved volumintegralet $\int \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\tau = \rho Ah\boldsymbol{g}$.

Det hydrostatiske trykket i vannet er $p = p_0 - \rho gz$ hvor vi ha valg z-aksen til å peke oppover og ha referanseposisjon $z = 0$ i vannoverflaten. Trykket der vannet er i kontakt med bunnen vektskåla er $p = p_0 + \rho gh$. Trykkraften som virker fra vannet på vektskåla er $\boldsymbol{F} = \int -\boldsymbol{k}p\,\mathrm{d}\sigma = -(p_0 + \rho gh)A\boldsymbol{k}$. Legg merke til at dersom det ikke hadde vært noe vann i vektskåla så hadde lufttrykket utøvd en trykkraft $\boldsymbol{F}_0 = \int -\boldsymbol{k}p_0\,\mathrm{d}\sigma = -p_0A\boldsymbol{k}$. Differansen mellom disse to trykkreftene er $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_0 = \int -\boldsymbol{k}p_0\,\mathrm{d}\sigma = -\rho ghA\boldsymbol{k} = \rho Ah\boldsymbol{g}$ som er tyngden til vannet!

Vi kan altså beregne et volumintegral over alt vannet ved hjelp av et flateintegral over yttergrensen til vannet!

Divergens

(M 3.3, GF 4.3, LH 6.13)

En enkel definisjon med tanke på å regne ut divergens gis i LH kap. 6.13:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1}$$

hvor vi kan tenke oss at del-operatoren er

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

og vektorfeltet er

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

Dersom vi kun er ute etter å regne ut divergensen i kartesiske koordinater så er definisjonen ovenfor grei nok. Vi kunne imidlertid ønske oss en alternativ definisjon av divergens som hjelper oss å forstå hva divergensen faktisk beskriver. En slik definisjon finner vi hos M kap. 3.3. Denne definisjonen hjelper oss dessuten å forstå hvordan divergens generaliseres til krumlinjede koordinater senere i emnet:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

Her er S en lukket flate som omslutter et volum V. Integralet gir den integrerte fluksen ut av den lukkede flaten. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto utstrømning gjennom en lukket flate i grensen at flaten skrumper inn til et punkt.

Vi skal nå vise at dersom vi starter med integral-definisjonen (2) så følger differensial-uttrykket (1) som en konsekvens.

For å regne dette ut lar vi kontrollvolumet ha en form som det er spesielt enkelt år regne på i kartesiske koordinater: En terning med sentrum i (x_0, y_0, z_0) og med side-kanter $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. La oss nummerere sidene som en vestlig terning (høyrehånds terning med sum 7 på motstående sider).

1. Flaten er $x = x_0 + \frac{\Delta x}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = v_x(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $v_x(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)\Delta y\Delta z$.

2. Flaten er $y = y_0 + \frac{\Delta y}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = v_y(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $v_y(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta x\Delta z$.

3. Flaten er $z = z_0 + \frac{\Delta z}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = v_z(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $v_z(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})\Delta x\Delta y$.

4. Flaten er $z = z_0 - \frac{\Delta z}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{k}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = -v_z(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2})$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $-v_z(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2})\Delta x\Delta y$.

5. Flaten er $y = y_0 - \frac{\Delta y}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{j}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = -v_y(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $-v_y(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta x\Delta z$.

6. Flaten er $x = x_0 - \frac{\Delta x}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}$, på flaten har vi $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = -v_x(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $-v_x(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)\Delta y\Delta z$.

Alle disse seks integralene har blitt beregnet ved den såkalte "midtpunktsregelen" for numerisk integrasjon som står beskrevet i kapittel 12.2 i kompendiet i MAT-INF1100 (Mørken 2017).

Så summerer vi motstående flater

Side 1 og 6: $v_x(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)\Delta y\Delta z - v_x(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0)\Delta y\Delta z \approx \frac{\partial v_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta y\Delta z.$

Side 2 og 5: $v_y(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta x\Delta z - v_y(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta x\Delta z \approx \frac{\partial v_y}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta y\Delta z.$

Side 3 og 4: $v_z(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})\Delta x\Delta y - v_z(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2})\Delta x\Delta y \approx \frac{\partial v_z}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta x\Delta y\Delta z.$

Alle disse tre deriverte har framkommet ved den såkalte "symmetriske versjonen av Newtons kvotient" for numerisk derivering som står beskrevet i kapittel 11.4.1 i kompendiet i MAT-INF1100 (Mørken 2017).

Vi har følgelig fluksintegralet

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \approx \nabla \cdot \boldsymbol{v} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Legg merke til at i grensen $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ og $\Delta z \to 0$ så vil alle tilnærmingene bli eksakt, og vi har at definisjonen (2) impliserer (1).

Ekspansjon og kontraksjon

Dersom $\nabla \cdot \boldsymbol{v} > 0$ sier vi feltet er en ekspansjon, eller har netto utstrømning.

Dersom $\nabla \cdot \boldsymbol{v} < 0$ sier vi feltet er en kontraksjon, eller har netto innstrømning.

Dersom $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ sier vi feltet er inkompressibelt, eller et solenoid-felt, eller er divergensfritt.

Eksempel: Konstant strøm

For $\boldsymbol{v}$ konstant har vi trivielt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Eksempel: Posisjonsvektor

For $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ har vi

$$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$$

som viser at posisjonsvektor er en ekspansjon.

Eksempel: Rotasjon som stivt legeme

For $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ hvor $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$ og $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ har vi

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

Eksempel: Mer generell rotasjon, ikke nødvendigvis som stivt legeme

La hastighetsfeltet være

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

hvor α er et vilkårlig tall (merk at $\alpha = 0$ gir rotasjon som stivt legeme). Vi har

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

utenom origo. I origo må vi passe oss, da vi her kan ha et singulært punkt hvor hastighetsfeltet ikke nødvendigvis er definert.