Forelesning 22/2–2019 ved Karsten Trulsen

Eksempel: Vinkelfart for en karusell, beregnet ved hjelp av sirkulasjon Se på en karusell $\boldsymbol{v} = \omega \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} = -\omega y \boldsymbol{i} + \omega x \boldsymbol{j}$. Regn ut sirkulasjonen C rundt en sirkel i xy-planet med sentrum i origo og radius R. Regn også ut arealet A av sirkelskiva i xy-planet. Legg merke til at $\omega = \frac{C}{2A}$. Dette tyder på at vi kanskje kan finne vinkelfarten for en rotasjon ved å ta forholdet mellom en sirkulasjon og et areal. Vi skal la dette eksemplet tjene som inspirasjon for den følgende diskusjonen om virvling.

Virvling

(M 3.4, GF 4.4, LH 6.13)

En enkel definisjon med tanke på å regne ut virvling gis i LH kap. 6.13:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{1}$$

hvor vi kan tenke oss at del-operatoren er

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

og vektorfeltet er

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}$$

Vi ønsker imidlertid en alternativ definisjon av virvling som hjelper oss bedre å forstå intuitivt hva virvlingen faktisk beskriver. En slik definisjon finner vi hos M kap. 3.4. Denne definisjonen hjelper oss dessuten å forstå hvordan virvling generaliseres til krumlinjede koordinater senere i emnet:

$$\boldsymbol{n} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \int_{\gamma} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

Her er γ en lukket kurve som omslutter en flate S med areal A. Flaten S har enhets normalvektor $\boldsymbol{n}$. Kurven γ og flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ er orientert i henhold til høyrehåndsregelen. Integralet gir sirkulasjonen rundt den lukkede kurven γ. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto sirkulasjon rundt et punkt i grensen at flaten skrumper inn til punktet.

Vi skal nå vise at dersom vi starter med integral-definisjonen (2) så følger differensial-uttrykket (1) som en konsekvens.

Vi lar γ være et rektangel orientert langs de kartesiske aksene slik at det blir lett å regne på i kartesiske koordinater: Et rektangel med sentrum i (x_0, y_0, z_0) orientert parallelt med yz-planet og med sidekanter Δy og Δz. Vi har normalvektoren $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$ i positiv x-retning, og orienterer kurven γ i henhold til høyrehåndsregelen.

1. Siden er $x = x_0$, $|y - y_0| \leq \frac{\Delta y}{2}$ og $z = z_0 - \frac{\Delta z}{2}$. En passende parameterisering kan være $\boldsymbol{r}(t) = x_0\boldsymbol{i} + (y_0 + t)\boldsymbol{j} + (z_0 - \frac{\Delta z}{2})\boldsymbol{k}$ for $-\frac{\Delta y}{2} \leq t \leq \frac{\Delta y}{2}$. Differensialet av posisjonsvektor er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = v_y(\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $v_y(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2})\Delta y$.

2. Siden er $x = x_0$, $y = y_0 + \frac{\Delta y}{2}$ og $|z - z_0| \leq \frac{\Delta z}{2}$. En passende parameterisering kan være $\boldsymbol{r}(t) = x_0\boldsymbol{i} + (y_0 + \frac{\Delta y}{2})\boldsymbol{j} + (z_0 + t)\boldsymbol{k}$ for $-\frac{\Delta z}{2} \leq t \leq \frac{\Delta z}{2}$. Differensialet av posisjonsvektor er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}t$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = v_y(\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $v_z(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta z$.

3. Siden er $x = x_0$, $y = y_0 + \frac{\Delta y}{2}$ og $|z - z_0| \leq \frac{\Delta z}{2}$. En passende parameterisering kan være $\boldsymbol{r}(t) = x_0\boldsymbol{i} + (y_0 - t)\boldsymbol{j} + (z_0 + \frac{\Delta z}{2})\boldsymbol{k}$ for $-\frac{\Delta y}{2} \leq t \leq \frac{\Delta y}{2}$. Differensialet av posisjonsvektor er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}t$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -v_y(\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $-v_y(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})\Delta y$.

4. Siden er $x = x_0$, $y = y_0 - \frac{\Delta y}{2}$ og $|z - z_0| \leq \frac{\Delta z}{2}$. En passende parameterisering kan være $\boldsymbol{r}(t) = x_0\boldsymbol{i} + (y_0 - \frac{\Delta y}{2})\boldsymbol{j} + (z_0 - t)\boldsymbol{k}$ for $-\frac{\Delta z}{2} \leq t \leq \frac{\Delta z}{2}$. Differensialet av posisjonsvektor er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}t$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -v_y(\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $-v_z(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta z$.

Alle disse fire integralene har blitt beregnet ved den såkalte "midtpunktsregelen" for numerisk integrasjon som står beskrevet i kapittel 12.2 i kompendiet i MAT-INF1100 (Mørken 2017).

Dersom vi summerer motstående sider får vi

Side 1 og 3: $v_y(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2})\Delta y - v_y(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2})\Delta y \approx -\frac{\partial v_y}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta y \Delta z.$

Side 2 og 4: $v_z(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta z - v_z(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0)\Delta z \approx \frac{\partial v_z}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta y \Delta z.$

Begge disse deriverte har framkommet ved den såkalte "symmetriske versjonen av Newtons kvotient" for numerisk derivering som står beskrevet i kapittel 11.4.1 i kompendiet i MAT-INF1100 (Mørken 2017).

Vi har følgelig sirkulasjonsintegralet

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{n} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} \Delta y \Delta z$$

Legg merke til at i grensen $\Delta y \to 0$ og $\Delta z \to 0$ så vil alle tilnærmingene bli eksakt, og vi har at definisjonen (2) impliserer (1).

Merk at for ett valg av normalvektor $\boldsymbol{n}$, slik som utregningen ovenfor, så har vi kun bestemt én komponent av virvlingen. Det vil være nødvendig å gjøre samme regnestykke to ganger til, med normalvektor $\boldsymbol{n}$ orientert i to andre retninger, for å bestemme alle komponentene av virvlingen.

Eksempel: Posisjonsvektor

La vektorfeltet være gitt ved posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

$$\nabla \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$$

Eksempel: Rotasjon som stivt legeme med vinkelhastighet oppover

La $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$. Hastighetsfeltet er $\boldsymbol{v} = \omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$, og vi har

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\omega\boldsymbol{k}$$

Legg merke til at dersom vi står på en vanlig karusell så beskriver vi to typer rotasjon samtidig. På den ene siden den globale bevegelsen rundt rotasjonsaksen til karusellen. På den andre siden den lokale bevegelsen rundt oss selv. Vinkelhastigheten for rotasjon rundt oss selv er halvparten av virvlingen.

Eksempel: Vindprofil nær bakken

La xy-planet være bakken, la vinden blåse i x-retning og la z-aksen peke oppover.

Det er fornuftig å anta at vinden bremses på grunn av friksjon nær bakken slik at vi kan bruke følgende modell for vinden tilstrekkelig nær bakken:

$$\boldsymbol{v} = \alpha z\boldsymbol{i}$$

Dette er en såkalt "skjærstrøm".

Anta at en bevisstløs mygg lar seg frakte med vinden.

Vi regner ut virvlingen av hastighetsfeltet

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{j}$$

For å tolke dette resultatet kan vi spekulere på om myggen vil rotere på grunn av hastighetsfeltet som om systemet var et stivt legeme, i så fall kan det se ut til at myggen vil rotere rundt seg selv med vinkelhastighet $\frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{\alpha}{2}\boldsymbol{j}$.

I virkeligheten er problemet med å bestemme hvordan myggen roterer rundt seg selv, på grunn av at friksjonskrefter virker ulikt på over- og undersiden, et mye mer komplisert problem enn skissert her. Eksempelet fungerer likevel for å illustrere tendensen til å rotere rundt seg selv som vil induseres på grunn av en slik skjærstrøm.

Vi legger merke til følgende: Virvling beskriver tendens til å rotere rundt seg selv, mens rotasjon som stivt legeme er med hensyn til en rotasjonsakse som godt kan være på et annet sted enn seg selv.

Eksempel: Mulig modell for strømning nær sluket i en vask?

Se på hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

hvor origo er et singulært punkt.

Vi regner ut at

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

utenom origo. I dette tilfellet gjelder ikke utregningen i origo, da vi her har en vesentlig singularitet hvor hastighetsfeltet ikke er definert og hvor virvlingen i praksis er uendelig stor.

Dette strømningsfeltet strømmer i sirkler rundt origo. Likevel har strømningsfeltet ikke tendens til å rotere rundt seg selv. Ganske ulikt en tradisjonell karusell!

Kommentar om virvelfritt felt

Dersom $\nabla \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ sier vi feltet er virvelfritt.

Det at feltet er virvelfritt betyr at man ikke har en tendens til å rotere rundt seg selv. Det kan likevel være en sirkulerende bevegelse slik som i eksemplet ovenfor.

Eksempel: Mer generell modell for strømning nær sluket i en vask?

Se på hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

hvor α er et vilkårlig tall (merk at $\alpha = 0$ gir rotasjon som stivt legeme). Dersom $\alpha > 0$ er origo et singulært punkt.

Vis at virvlingen er i positiv z-retning (prograd) dersom $\alpha < 1$, og er i negativ z-retning (retrograd) dersom $\alpha > 1$.

Oppgave: Fyll opp vasken med vann. Ta litt støv fra gulvet og strø på vannoverflaten. Rør om. Trekk ut proppen.

Studer hvordan støvkornene roterer rundt seg selv. Bestem hva som kan være en passende verdi for parameteren α i din vask!

Eksempel: Rotasjon som stivt legeme med generell vinkelhastighet

Hastighetsfeltet er $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{r} - \overset{\downarrow}{\boldsymbol{r}} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{\omega}$$

hvor vi har benyttet at $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$ og at skalarproduktet mellom to vektorer kommuterer. Pila over $\boldsymbol{r}$ til venstre foran ∇ indikerer at ∇ skal derivere til venstre.

Eksemplet fullføres på neste forelesning...