Forelesning 26/2–2019 ved Karsten Trulsen

Eksempel: Rotasjon som stivt legeme med generell vinkelhastighet

Hastighetsfeltet er $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{r} - \overset{\downarrow}{\boldsymbol{r}} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{\omega}$$

hvor vi har benyttet at $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$ og at skalarproduktet mellom to vektorer kommuterer. Pila over $\boldsymbol{r}$ til venstre foran ∇ indikerer at ∇ skal derivere til venstre.

Vi har at

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla = \omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}$$

og følgelig

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{r} = \omega_x \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\omega}$$

Til slutt får vi resultatet

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$$

To viktige spesialtilfeller: Divergensen til en virvling er null, virvlinga til en gradient er null

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \phi &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) + \boldsymbol{j} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) + \boldsymbol{k} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right) = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

Begge disse er lik null på betingelse av at det ikke spiller noen rolle hvilken rekkefølge vi utfører derivasjonene. LH setning 2.5.2 sier at dersom de blandete deriverte eksisterer og er kontinuerlige så er de like. Vi skal anta at dette er oppfylt.

Skalar- og vektorpotensial

Dersom $\boldsymbol{v} = \nabla \phi$ sier vi at ϕ er et skalarpotensial, eller bare potensial, til $\boldsymbol{v}$.

Dersom $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ sier vi at $\boldsymbol{A}$ er et vektorpotensial til $\boldsymbol{v}$.

De to viktige spesialtilfellene ovenfor viser at:

Dersom feltet kan uttrykkes ved et vektorpotensial, så er det divergensfritt

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} \implies \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Dersom feltet kan uttrykkes ved et (skalar)potensial, så er det virvelfritt

$$\boldsymbol{v} = \nabla \phi \implies \nabla \times \boldsymbol{v} = 0$$

Det kan også vises at implikasjonene går andre vei, det vil si:
Dersom et felt er divergensfritt, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, så eksisterer det et vektorpotensial $\boldsymbol{A}$ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.
Dersom et felt er virvelfritt, $\nabla \times \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, så eksisterer det et (skalar)potensial ϕ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla \phi$.

Vi skal snart vise eksistensen av et (skalar)potensial for et virvelfritt felt. Vi skal ikke vise eksistensen av et vektorpotensial for et divergensfritt felt, men vi skal vise at i det spesielle tilfellet at dersom et felt er 2D og divergensfritt så eksisterer et vektorpotensial.

Eksempel: Vis at tyngdekrafta i Newtons gravitasjonslov er virvelfri

Vi har tidligere sett at vi kan skrive tyngdekraft ved hjelp av et tyngdepotensial

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{i}_r = \nabla\left(\frac{GMm}{r}\right) = -\nabla\left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

(Husk at fysikere liker å sette minus-tegn foran gradienten til et potensial.)
Siden tyngdekrafta er gradienten til et skalarpotensial så vet vi at den er virvelfri.

Litt mer om konservativt felt

Vi har tidligere diskutert tre forskjellige måter å definere konservativt felt (og det kommer an på lærebokforfatteren hvilken som står skrevet). Vi har nå også en fjerde måte å definere konservativt felt:

(I) M (s.28): $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom sirkulasjonen $\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er lik null for en vilkårlig lukket kurve γ.

(II) GF (s.98): $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom kurveintegralet mellom to punkter er uavhengig av veien mellom punktene, $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, hvor γ_1 og γ_2 er to kurver som går mellom samme start- og sluttpunkt.

(III) LH (s.202): $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom den kan skrives som gradienten til et skalarfelt, $\boldsymbol{F} = \nabla \phi$. Vi sier da at ϕ er et skalarpotensial.

(IV) $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom den er virvelfri, $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$.

Vi har tidligere vist at $(I) \iff (II) \iff (III)$. Nå har vi i tillegg vist at $(III) \implies (IV)$.
Om kort tid skal vi også vise at $(IV) \implies (I)$, men det må vente til vi har utledet Stokes sats.

Strømfunksjon

La oss anta at vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ er divergensfritt og 2D, nemlig

$$\boldsymbol{v} = v_x(x,y)\boldsymbol{i} + v_y(x,y)\boldsymbol{j}$$

og

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Vi kan da introdusere en såkalt "strømfunksjon" $\psi(x,y)$ med

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Det er opplagt at feltet er divergensfritt.

Ekvivalent kunne vi ha introdusert vektorpotensialet $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{k}\psi$ og skrevet vektorfeltet som

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times (-\boldsymbol{k}\psi) = \boldsymbol{k} \times \nabla\psi = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\boldsymbol{j}$$

og da ser vi umiddelbart at vektorfeltet blir divergensfritt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

La oss nå finne strømlinjene. Husk at strømlinjene er kurver som er overalt tangent til vektorfeltet, dette uttrykker vi ved

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{k} \times \nabla\psi) \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \nabla\psi\, \mathrm{d}z - \boldsymbol{k}\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Vi legger merke til at $\nabla\psi$ ikke har noen komponent i z-retning. Vi gjenkjenner også $\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\psi$ som et fullstendig differensial. Det følger at vi må oppfylle de to kravene $\mathrm{d}z = 0$ og $\mathrm{d}\psi = 0$ som viser at strømlinjene er gitt ved $\psi =$ konstant og $z =$ konstant.

Dersom strømfunksjonen ψ eksisterer så er altså strømlinjene gitt som ekviskalarlinjene $\psi =$ konstant og kan lett plottes på datamaskin ved hjelp av en `contour`-kommando.

Husk at strømfunksjonen ikke alltid eksisterer! I så fall må vi gå tilbake til den opprinnelige likninga $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

Eksempel: Feltet $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$

Forsøk på å finne en strømfunksjon ψ leder til en selvimotsigelse. Vi kan forstå hvorfor, fordi divergensen er ulik null, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 1$, derfor vet vi at en strømfunksjon ikke eksisterer. Vi kan likevel finne strømlinjene ved å løse $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Vi finner da rette linjer parallelle med x-aksen.

Eksempel: Feltet $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i}$

I dette tilfellet er divergensen er lik null, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, derfor vet vi at en strømfunksjon eksisterer. Vi finner $\psi = -\frac{1}{2}y^2 + c$. Strømlinjene er linjer parallelle med x-aksen.

Merk at strømlinjene er de samme som i forrige eksempel, men kun det siste eksemplet har en strømfunksjon.