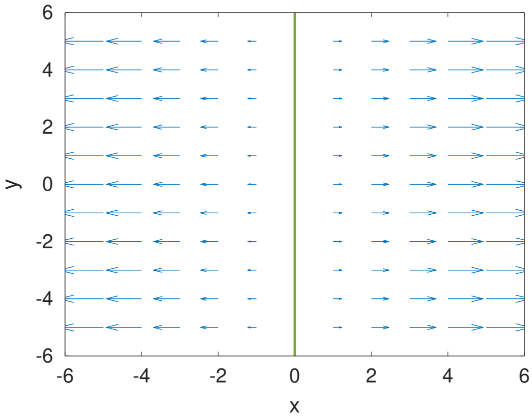
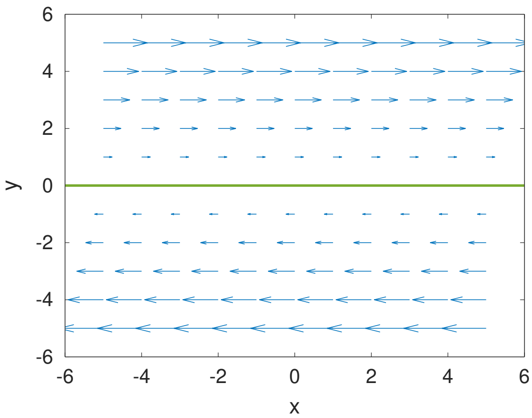
Forelesning 1/3–2019 ved Karsten Trulsen

Eksempel: Feltet $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$



Forsøk på å finne en strømfunksjon ψ leder til en selvimotsigelse. Vi kan forstå hvorfor, fordi divergensen er ulik null, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 1$, derfor vet vi at en strømfunksjon ikke eksisterer. Vi kan likevel finne strømlinjene ved å løse $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Vi finner da rette linjer parallelle med x-aksen.

Eksempel: Feltet $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i}$



I dette tilfellet er divergensen er lik null, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, derfor vet vi at en strømfunksjon eksisterer. Vi finner $\psi = -\frac{1}{2}y^2 + c$. Strømlinjene er linjer parallelle med x-aksen.

Merk at strømlinjene er de samme som i forrige eksempel, men kun vektorfeltet i det siste eksemplet har en strømfunksjon. Det er altså ikke tilstrekkelig å identifisere strømlinjene for å entydig identifisere et vektorfelt.

Strømrør

Et "rør" som har vegger som er strømlinjer. Dette kan vi både tenke oss i tredimensjonalt rom som et vanlig rør, og vi kan tenke oss plan strøm (typisk xy-planet) hvor "veggene" i "røret" er kurver i planet.

I de to eksemplene ovenfor har vi identiske strømrør, begge for plan strøm i xy-planet med vegger parallelle med x-aksen.

Fluks av todimensjonal strøm gjennom strømrør

La oss regne ut den integrerte fluksen gjennom et strømrør for et vektorfelt i xy-planet, $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$, hvor kurven γ ligger i xy-planet og krysser strømrøret fra et punkt A på den ene siden til et punkt B på den andre siden.

Merk: Dette er integrert fluks for en plan strømning gjennom en kurve i planet. Derfor benytter vi ds som er et infinitesimalt kurveelement og ikke et infinitesimalt flateelement.

Vi har $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \pm\boldsymbol{k} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \pm(-\boldsymbol{i}\mathrm{d}y + \boldsymbol{j}\mathrm{d}x)$. La oss anta at $\boldsymbol{n}$ skal peke i positiv x-retning, så vi velger $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{i}\mathrm{d}y - \boldsymbol{j}\mathrm{d}x$. Den integrerte fluksen gjennom kurven γ blir da $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_\gamma v_x\mathrm{d}y - v_y\mathrm{d}x$. Nå kommer vi ikke lenger uten å gjøre flere antakelser.

La oss anta at feltet har en strømfunksjon, i så fall får vi

$$\int_A^B \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_\gamma -\frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x = -\int_A^B \mathrm{d}\psi = \psi_A - \psi_B.$$

Dette følger av at integranden er et fullstendig differensial. I dette tilfellet er resultatet uavhengig av integrasjonsveien, så vi trenger kun å vite endepunktene A og B.

Dersom strømfunksjonen eksisterer er den integrerte fluksen i et strømrør gitt ved differansen i strømfunksjonen mellom de to sidene. Da er den integrerte fluksen konstant over alle tverrsnitt γ. Dersom strømfunksjonen ikke eksisterer må vi regne med at den integrerte fluksen i et strømrør avhenger av tverrsnittet γ.

Eksempel: Feltet $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$

Vi har sett at det ikke eksisterer noen strømfunksjon. Vis at den integrerte fluksen i et strømrør avhenger av tverrsnittet!

Eksempel: Feltet $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i}$

Vi har sett at det eksisterer en strømfunksjon. Den integrerte fluksen i et strømrør er konstant for alle tverrsnitt.

Praktisk anvendelse av del-operator i meteorologi

Kapittel 5 i GF.

Gauss integralsats

Vi har tidligere sett at divergensen til et vektorfelt kan uttrykkes som

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

Her er S en lukket flate som omslutter et volum V. Flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ er rettet ut fra volumet, slik at integralet gir den integrerte fluksen ut av den lukkede flaten. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto utstrømning gjennom en lukket flate i grensen at flaten skrumper inn til et punkt.

Nå ønsker vi å utvide denne tankegangen til et endelig stort volum V, omsluttet av en lukket flate S, som ikke lenger skal skrumpe inn til et punkt. Dette kan vi få til ved å dele opp det opprinnelige volumet i mange små biter V_m som er omsluttet av flater S_m. Så kan vi summere opp bidraget over alle bitene. La oss fjerne grenseverdien midlertidig, og la oss multiplisere opp volumet, og ta summen

$$\sum_m \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, V_m \approx \sum_m \int_{S_m} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma \tag{2}$$

Vi merker oss at i grensen at bitene blir infinitesimalt små, så vil V_m bli infinitesimale volumelementer $\mathrm{d}\tau$, og summen over alle volumene kan uttrykkes som et integral. Videre merker vi oss at der hvor to delflater S_m møtes så vil fluksintegralene gi bidrag som er like i tallverdi og motsatt i fortegn fordi flatenormalvektorene $\boldsymbol{n}$ peker i motsatt retning. Derved vil summen over alle flateintegralen bli lik integralet over yttergrensen S.

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\tau = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma \tag{3}$$

Dette er Gauss sats.

Eksempel: Integrert fluks av feltet $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}$ ut av enhetskube

I forelesningen 15.februar viste vi at den integrerte fluksen ut av enhetskuben var lik 1. Nå kan vi alternativt regne ut divergensen $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 1$. Volumintegralet av divergensen er derfor lik volumet av enhetskuben, som er lik 1.

Eksempel: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, V kule med radius R rundt origo

Vi regner først ut divergensen $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 3$. Følgelig ser vi at volumintegralet er lik 3 ganger volumet til kula.

Vi innser deretter at $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$, og vi får at $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{r}| = R$. Følgelig ser vi at fluksintegralet er lik R ganger arealet til kuleskallet.

Dette vet vi selvfølgelig er riktig, volumet er $\frac{4}{3}\pi R^3$ og arealet er $4\pi R^2$.

Eksempel: Vektorfeltet i Newtons gravitasjonslov

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{i}_r}{r^2} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

og V kule med radius R og sentrum i origo.

Vi kan regne ut at feltet er divergensfritt $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ og volumintegralet ser følgelig ut til å bli null.

Vi innser deretter at $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$, og vi får at $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{R^2}$. Følgelig ser vi at fluksintegralet er positivt og lik 4π fordi arealet til kuleskallet er $4\pi R^2$.

Dette ser ikke ut til å stemme med Gauss sats? Svaret kommer neste gang. . .