Forelesning 5/3–2019 ved Karsten Trulsen

Husk: Gauss integralsats

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\tau = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

Eksempel: Vektorfeltet i Newtons gravitasjonslov
La oss sette inn vektorfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{i}_r}{r^2} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

i Gauss sats (1) hvor vi lar V være ei kule med radius R med sentrum i origo.

Vi kan regne ut at feltet er divergensfritt $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ og volumintegralet på venstre side av (1) ser følgelig ut til å bli null. Vi innser imidlertid at $\boldsymbol{v}$ har en singularitet i origo. Utregningen av $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ er derfor ikke gyldig i origo. Vi må ta høyde for at divergensen også har en singularitet i origo.

For å regne ut flateintegralet på høyre side av (1) finner vi først at $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$, og at $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{R^2}$ på overflaten. Følgelig ser vi at fluksintegralet er positivt og lik 4π fordi arealet til kuleskallet er $4\pi R^2$.

Disse to er ikke like. Det skyldes at siden feltet $\boldsymbol{v}$ er singulært i origo så er også divergensen $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ singulær i origo, og volumintegralet av divergensen ble feil fordi vi ikke håndterte denne singulariteten på riktig måte. I dette emnet skal vi unngå dette problemet ved å ekskludere det singulære punktet i origo fra volumintegralet.

Eksempel: Vis at dersom det singulære punktet i origo ekskluderes fra volumet V så er Gauss sats (1) igjen oppfylt.
Hint: Overflaten S vil da måtte utvides med en "liten" flate rundt det singulære punktet i tillegg til den opprinnelige ytterflaten.

Trykkraft, hydrostatisk trykk, oppdrift, Arkimedes prinsipp

Husk også formelen for hydrostatisk trykk

$$p = p_0 - \rho g z$$

hvor z er den vertikale koordinaten, minustegnet viser at z-aksen peker oppover, g er tyngdens akselerasjon, ρ er tettheten til væska, og p_0 er et referansetrykk ved $z = 0$.
Husk formelen for trykkraften som virker på et legeme

$$\boldsymbol{F} = -\int_S p\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

hvor S er overflaten til legemet, $\boldsymbol{n}$ er enhets normalvektor som peker ut fra legemet, og p er trykket som omgir legemet.
Det er ikke nødvendigvis enkelt å regne ut trykkraften direkte som flateintegral, for dersom legemet har en komplisert form så kan beskrivelsen av både S og $\boldsymbol{n}$ være

utfordrende. Vi kunne ha ønsket oss en formel for å overføre flateintegralet til et volumintegral over legemet, som kanskje er lettere å beregne.

En modifisert form for Gauss sats

M kap. 5.1.3.

La oss sette $\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a}$ hvor p er en skalar som er en funksjon av posisjon og hvor $\boldsymbol{a}$ er en vilkårlig konstant vektor. Divergensen er

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (p\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} \cdot \nabla p$$

Dersom vi setter dette inn i Gauss sats (1), og setter "$\boldsymbol{a}\cdot$" utenfor integraltegnet fordi det er en konstant vektor, så får vi

$$\boldsymbol{a} \cdot \int_V \nabla p \, \mathrm{d}\tau = \boldsymbol{a} \cdot \int_S p\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

men siden $\boldsymbol{a}$ er vilkårlig så ender vi opp med følgende alternative form for Gauss sats

$$\int_V \nabla p \, \mathrm{d}\tau = \int_S p\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

En modifisert form for Gauss sats for bruk på trykkraft

M kap. 5.1.3.

Nå kan vi regne ut trykkraften på et legme som et volumintegral over legemet

$$\boldsymbol{F} = \int_S -p\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = -\int_V \nabla p \, \mathrm{d}\tau$$

Vi kan nå sette inn uttrykket for hydrostatisk trykk, $p = p_0 - \rho g z$, og vi har gradienten $\nabla p = -\rho g \boldsymbol{k}$, og vi ender opp med

$$\boldsymbol{F} = \int_V \rho g \boldsymbol{k} \, \mathrm{d}\tau = m g \boldsymbol{k}$$

hvor m er massen til det fortrengte væsken. Dette kalles oppdrift. Oppdriften er like stor som vekten til væska som legemet fortrenger. Dette er hva som kalles Arkimedes lov.

Egentlig burde vi stusse over at denne måten å bruke Gauss sats på er riktig: Trykket p som inngår i flateintegralet er en egenskap til fluidet rundt legemet, men volumintegralet skal beregnes over et legeme hvor det ikke trenger å være noe fluid, hvor tettheten ikke trenger å være den samme som i fluidet rundt legemet, og hvor trykket ikke engang trenger å være definert. Vi har altså erstattet legemet med fluid identisk med omgivelsene slik at det hydrostatiske trykket kan forlenges inn i legemet. Denne måten å løse oppdriftsproblemet på ble først beskrevet av Simon Stevin (1548–1620).

Eksempel: Vannsøyle på kjøkkenvekt

Fyll en beholder med litt vann, sett beholderen på en vekt, og finn ut hvor mye den veier. Klem beholderen delvis sammen slik at vannet stiger i beholderen. Vil vekta vise større utslag?

Andre modifiserte versjoner av Gauss sats

M kap. 5.1.3.

La oss sette $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}$ hvor $\boldsymbol{u}$ er et vektorfelt som er en funksjon av posisjon og hvor $\boldsymbol{a}$ er en vilkårlig konstant vektor. Divergensen er

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u})$$

Vi har også

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}$$

Dersom vi setter dette inn i Gauss sats (1), og setter "$\boldsymbol{a}\cdot$" utenfor integraltegnet fordi det er en konstant vektor, så får vi

$$\boldsymbol{a} \cdot \int_V -\nabla \times \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\tau = \boldsymbol{a} \cdot \int_S \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

men siden $\boldsymbol{a}$ er vilkårlig så ender vi opp med følgende alternative form for Gauss sats

$$\int_V -\nabla \times \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\tau = \int_S \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

Eksempel: Vis at for enhver lukke flate S så er

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = 0$$