Forelesning 8/3–2019 ved Karsten Trulsen

Stokes integralsats

Vi har tidligere sett at komponenten i retning $\boldsymbol{n}$ av virvlinga til et vektorfelt $\boldsymbol{n}$ kan uttrykkes som

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v} = \lim_{A\to 0}\frac{1}{A}\oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Her er γ en lukket kurve som omslutter en åpen flate S med areal A. At flaten S er åpen betyr at den ikke omslutter et volum, men er avgrenset av den lukkede kurven γ. Flaten S har en flatenormalvektor $\boldsymbol{n}$ som er orientert i overensstemmelse med retningen rundt γ i henhold til høyrehåndsregelen. Grenseoppgangen forteller om feltet har netto sirkulasjon rundt en lukket kurve i grensen at kurven skrumper inn til et punkt.

Merk at før vi gjennomfører grenseoppgaven så trenger ikke flaten S å være plan, og flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ trenger følgelig ikke å være konstant, men etter grenseoppgangen forholder vi oss kun til en entydig flatenormalvektor $\boldsymbol{n}$.

Nå ønsker vi å utvide denne tankegangen til en endelig stor flate S, omsluttet av en lukket kurve γ, som ikke lenger skal skrumpe inn til et punkt. Dette kan vi få til ved å dele opp den opprinnelige flaten i mange små biter S_m som er omsluttet av kurver γ_m. Så kan vi summere opp bidragene fra alle bitene. La oss fjerne grenseverdien midlertidig, og la oss multiplisere opp arealet, og ta summen

$$\sum_m \boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}\, A_m \approx \sum_m \oint_{\gamma_m} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Vi merker oss at i grensen av at bitene blir infinitesimalt små, så vil A_m bli infinitesimale flateelementer $\mathrm{d}\sigma$, og summen over alle flatene kan uttrykkes som et integral. Videre merker vi oss at der hvor to delkurver γ_m møtes så vil fluksintegralene gi bidrag som er like i tallverdi og motsatt i fortegn fordi kurveelementene $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ peker i motsatt retning. Derved vil summen over alle kurvintegralene bli lik integralet over yttergrensen γ.

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

Dette er Stokes sats.

Konservativt felt

Vi har tidligere diskutert at det er fire måter å karakterisere et konservativt felt:

(I) $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom sirkulasjonen $\oint_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er lik null for en <u>vilkårlig</u> lukket kurve γ.

(II) $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom kurveintegralet mellom to punkter er uavhengig av veien mellom punktene, $\int_{\gamma_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, hvor γ_1 og γ_2 er to kurver som går mellom samme start- og sluttpunkt.

(III) $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom den kan skrives som gradienten til et skalarfelt, $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$. Vi sier da at ϕ er et skalarpotensial.

(IV) $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom den er virvelfri, $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.

Vi har tidligere vist at $(I) \iff (II) \iff (III)$. Vi har også vist at $(III) \implies (IV)$. Det gjenstår å vise at $(IV) \implies (I)$, dette lar seg nå lett vise med Stokes sats for dersom feltet er virvelfritt så ser vi umiddelbart at sirkulasjonen er null

Greens integralsats er et spesialtilfelle av Stokes integralsats

La S være et område i xy-planet avgrenset av en lukket kurve γ, og $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$. Vi kan da skrive $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y$ langs γ, og $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ i S.

La $\boldsymbol{v} = F(x,y)\boldsymbol{i} + G(x,y)\boldsymbol{j}$. Vi kan da regne ut at $\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$.

Dersom vi setter dette inn i Stokes sats (1) så får vi Greens sats

$$\iint_S \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_\gamma F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y$$

Eksempel: Sirkulasjonen til rotasjon som stivt legeme

La $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ hvor $\boldsymbol{r}$ er posisjonsvektor og $\boldsymbol{\omega}$ er vinkelhastighet for en rotasjon som stivt legeme. Vi har tidligere regnet ut at virvlingen er $\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$.

Dersom vi nå lar S være en plan flate med konstant enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n}$, avgrenset av en lukket kurve γ, og vi lar arealet til S være A, så har vi sirkulasjonen

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}A$$

Sjekk for eksempel hvordan dette blir dersom S er en sirkelskive for $z = 0$ med radius R, og $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$, og $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$.

Eksempel: Sirkulasjonen til mulig modell for strømningen nær sluket i en vask

Se på hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

hvor origo er et singulært punkt. Vi har tidligere regnet ut at $\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ utenom origo.

Regn ut sirkulasjonen rundt en sirkel med sentrum i origo og med radius R. Svaret blir 2π, uavhengig av radius R.

Regn ut flateintegralet av virvling. Dette integralet ser ut til å bli null ettersom virvlingen er null overalt utenom origo.

Disse to er ikke like. Det skyldes at siden feltet $\boldsymbol{v}$ er singulært i origo så er også virvlingen $\nabla \times \boldsymbol{v}$ singulær i origo, og flateintegralet av virvlingen ble feil fordi vi ikke håndterte denne singulariteten på riktig måte. I dette emnet skal vi unngå dette problemet ved å ekskludere det singulære punktet i origo fra flateintegralet.

Eksempel: Vis at dersom det singulære punktet i origo ekskluderes fra flaten S så er Stokes sats (1) igjen oppfylt.

Hint: Kurven γ vil da måtte utvides med en "liten" kurve rundt det singulære punktet i tillegg til den opprinnelige ytterkurven.

Eksempel: Bruk Stokes sats (1) til å vise at for enhver lukke flate S så er

$$\int_S \nabla \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

Merk at dette ble vist på forrige forelesning ved hjelp av Gauss sats, altså ved en overgang til et volumintegral. Nå skal vi vise det samme, men ved hjelp av Stokes sats, altså ved en overgang til kuveintegral.

Det første problemet er at flaten S som inngår i Stokes sats er åpen, men flaten S som inngår i denne oppgaven er lukket. La oss dele flaten i to biter, som begge er avgrenset av den samme lukkede kurven γ. Legg merke til at kurven γ har motsatt orientering for de to delene.

Regning med del-operatoren

Formlene i Rottmann side 64, som også finnes i M side 81–82, kan nå med fordel utforskes. Legg merke til hvordan notasjonen til Rottman er forskjellig fra den vi er vant til.

Ved hjelp av produktregelen for derivasjon, og regelen

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

og regelen

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

og at skalarproduktet er kommutativt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ og at kryssproduktet er antikommutativt $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, kan vi nå utlede følgende formler som står både i M s. 81–82 og i Rottmann s. 64:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$
$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{u}) = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} + f\nabla \cdot \boldsymbol{u}$$
$$\nabla \times (f\boldsymbol{u}) = \nabla f \times \boldsymbol{u} + f\nabla \times \boldsymbol{u}$$
$$\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} - (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}$$
$$\nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})$$
$$\nabla(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$$

Litt om dyadiske produkter

Vi noterer dyadisk produkt mellom vektorer uten noe symbol $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$. Dette er i overensstemmelse med M og GF. Andre bruker symbolet $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ som i praksis betyr det samme.

Et dyadisk produkt mellom to vektorer er enkelt i den forstand at det ikke medfører noen vektoroperasjon. Dersom α og β og γ er skalarer, og $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$ er vektorer, så har vi for eksempel $(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})(\gamma\boldsymbol{c}) = \alpha\gamma\boldsymbol{a}\boldsymbol{c} + \beta\gamma\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$.

Generelt har vi at et dyadisk produkt ikke kommuterer $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}$. Uttrykk med både skalarprodukt og dyadisk produkt kan regnes ut i hvilken som helst rekkefølge $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})$. I praksis viser det seg at man sparer en betydelig regne-innsats dersom man utfører prikk-operasjonen først, så generelt bør man regne ut dette uttrykket som $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

Advarsel!

Vi skal her gå ut ifra at vi kan bytte ut hvilken som helst av vektorene med ∇ og at uttrykket stadig har samme mening, for eksempel

$$(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\nabla\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \nabla\boldsymbol{c}$$

Dette er i overensstemmelse med M og GF, men er dessverre ikke i henhold til konvensjoner som brukes av alle. Vær derfor forberedt på at uttrykket $\nabla\boldsymbol{c}$ av mange kan tolkes med motsatt rekkefølge enn hva som gjøres her og i M og i GF. For å unngå denne tvetydigheten kan det ofte være tryggest enten å sette parentes $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{c}$ eller erklære hvilken konvensjon man holder seg til.