Forelesning 12/3–2019 ved Karsten Trulsen

Fluid- og kontinuumsmekanikk

Som eksempel på anvendelse av vektor feltteori og flervariabel kalkulus, og som illustrasjon av begrepene vi har gått igjennom så langt, og som introduksjon til et selvstendig fagfelt som i stor grad er basert på denne typen matematikk, skal vi nå etablere feltlikninger for fluid- og kontinuumsmekanikk. Vi skal også se tilsvarende anvendelser innen andre fagområder, for eksempel modellering av trafikk langs veier. Vi kunne også ha hentet eksempler fra elektromagnetisme, men det skal vi ikke diskutere her.

Kontinuum

Ideen om "kontinuum", eller kontinuerlig medium, ble formulert allerede av Aristoteles (384–322 f.Kr.): Noe som kan deles opp i stadig mindre biter som alltid har de samme egenskapene som de opprinnelige større bitene uansett hvor mye vi deler det opp.

Kontinuumshypotesen

"Kontinuumshypotesen" i fluidmekanikk er antakelsen at vi kan beskrive et fluid som et kontinuum, til tross for at vi vet at fluidet egentlig består av molekyler og atomer. Under kontinuumshypotesen tenker vi oss at egenskaper som tetthet, trykk, temperatur og hastighet er veldefinert for vilkårlig små volumelementer. Det er i praksis en grense for hvor små disse volumelementene kan være: De må være store i forhold til størrelsen på molekylene eller avstanden mellom molekylene. Kontinuumshypotesen slutter altså å være gyldig når vår problemstilling har en karakteristisk lengde som er sammenliknbar med størrelsen på molekylene eller avstanden mellom dem. I så fall kan ikke "kontinuumsmekanikk" brukes og vi må istedenfor ty til såkalt "statistisk mekanikk".

Ordet "kontinuumshypotese" brukes også innen matematikk, men i en helt annen betydning som ikke må forveksles med kontinuumshypotesen i fluidmekanikk.[1]

Fluid partikkel

En "fluid partikkel" er et infinitesimalt volum av et fluid, med masse, utstrekning, massetetthet osv. Vi kan godt tenke oss en fluid partikkel som en punktmasse. Tanken om at en fluid partikkel kan brukes som utgangspunkt for å beskrive oppførselen til et fluid ble introdusert av Leonhard Euler (1707–1783).

Strømlinjer og partikkelbaner

La oss betrakte en fluid partikkel med posisjon $\boldsymbol{r}_p(t)$. Vi antar den beveger seg i et hastighetsfelt $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$. Setter vi inn for posisjonen til partikkelen finner vi partikkelens hastighet $\boldsymbol{v}_p(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_p(t), t)$.

[1] I mengdeteori er kontinuumshypotesen en antakelse om at det ikke eksisterer en mengde som har kardinalitet strengt mellom kardinalitetene til de hele tallene og de reelle tallene. Antakelsen ble framsatt i 1878 av Georg Cantor (1845–1918). Kardinaliteten til en uendelig mengde uttrykker graden av uendelighet. Det er uendelig mange hele tall og det er uendelig mange reelle tall, men de reelle tallene har større grad av uendelighet enn de hele tallene. Kontinuumshypotesen i mengdeteori sier altså at det ikke finnes en uendelighet strengt mellom disse to.

Partikkelen beveger seg langs en bane som vi angir ved posisjonsvektor som funksjon av tid $\boldsymbol{r}_p(t)$. For å finne banen kan vi løse differensiallikninga for hastigheten uttrykt som den tidsderiverte av posisjonen

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_p}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_p(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_p(t), t).$$

Legg merke til at en bane er en reise i rom og tid.

Tidligere har vi definert strømlinjer som kurver som er overalt tangent til vektorfeltet. Disse er løsninger av differensiallikninga som uttrykker at kurveelementene er tangent til (parallell med) hastighetsfeltet

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}.$$

Denne likninga er ikke entydig definert dersom hastighetsfeltet $\boldsymbol{v}$ endrer seg i tid, derfor innser vi at strømlinjene er et øyeblikksbilde av vektorfeltet, ved fastholdt tid:

Strømlinjer er kurver som er tangent til vektorfeltet ved fastholdt tid.

Dette er vesentlig forskjellig fra baner, reiser i rom og tid, som tar hensyn til hvordan feltet endrer seg i tid.

Vi kan nå vise at dersom feltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$, så er kurvene til banene gitt ved strømlinjene: Vi vet at en infinitesimal forflytning langs en bane er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$. Dersom vi krysser dette med feltet $\boldsymbol{v}$ har vi $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$ og følgelig ser vi at kriteriet for strømlinjer er oppfylt av banene.

Dersom feltet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ ikke er stasjonært, så går banene ikke langs strømlinjene, fordi øyeblikksbilder av feltet vil se forskjellige ut fra ett øyeblikk til et annet.

Partikkelderivert, eller endring av en egenskap slik det observeres fra en partikkel som beveger seg langs en bane.

La $E(\boldsymbol{r}, t)$ være en skalar egenskap. Vi skal nå se på endringen av denne egenskapen, slik den oppfattes av en observatør som befinner seg på en fluid partikkel. Det er to årsaker til at observatøren registrerer endring av egenskapen E, delvis fordi E endrer seg i tid, og delvis fordi observatøren flytter seg til et annet sted hvor E har en annen verdi. Endringen i E på grunn av at partikkelen har endret sin posisjon $\Delta\boldsymbol{r}$ i løpet av tid Δt er

$$\Delta E = E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - E(\boldsymbol{r}, t).$$

Nå gjør vi samme knep som vi gjorde da vi utledet gradient og retningsderivert, vi ser på endringen med hensyn på bare tid, eller bare posisjon

$$\Delta E = E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t) + E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t) - E(\boldsymbol{r}, t).$$

Vi har at

$$E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t + \Delta t) - E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t) \approx \frac{\partial E}{\partial t}\Delta t$$

og

$$E(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}, t) - E(\boldsymbol{r}, t) \approx \nabla E \cdot \Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{r} \cdot \nabla E$$

og følgelig får vi

$$\Delta E \approx \frac{\partial E}{\partial t}\Delta t + \Delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla E.$$

Nå deler vi på Δt

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \approx \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \cdot \nabla E$$

og lar $\Delta t \to 0$. Partikkelhastigheten dukker da opp i andre ledd på høyre side $\boldsymbol{v}_p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$.

På venstre side får vi nå en spesiell type tidsderivert av egenskapen E, nemlig den tidsderiverte slik den oppfattes av en observatør som befinner seg på en fluid partikkel. Vi innfører derfor et spesielt symbol for å markere dette

$$\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial E}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla E.$$

Det første leddet på høyre side kaller vi den lokalderiverte fordi det beskriver hvordan egenskapen endrer seg på et fastholdt sted og ikke avhenger av at fluidpartikkelen flytter på seg. Det andre leddet på høyre side kaller vi den konvektivt (eller advektivt) deriverte fordi det avhenger av forflytningen til fluidpartikkelen. Summen av disse kaller vi den partikkelderiverte.

Vi kan nå utvide beskrivelsen til en vektor egenskap $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t)$ som vi kan sette rett inn i uttrykket ovenfor

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{F}.$$

I dette uttrykket er det viktig å merke seg at prikk-produktet skal utføres mellom $\boldsymbol{v}$ og ∇, mens ∇-operatoren skal derivere $\boldsymbol{F}$. Uttrykket $\nabla \boldsymbol{F}$ medfører både derivasjon og multiplikasjon, denne multiplikasjonen mellom to vektorer skal vi notere uten noe symbol og vi skal kalle den et "dyadisk produkt".

Partikkelakselerasjon

Med partikkelakselerasjon skal vi forstå akselerasjonen som en partikkel blir utsatt for mens den beveger seg langs sin bane

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$$

Partikkelakselerasjonen er altså en sum av to bidrag som vi skal kalle lokalakselerasjon og konvektiv akselerasjon. I uttrykket for den konvektive akselerasjonen skal prikk-produktet utføres mellom ∇ og den hastighetsvektoren $\boldsymbol{v}$ som ikke skal deriveres.

Litt om dyadiske produkter

Vi skal notere dyadisk produkt mellom vektorer uten noe symbol $\boldsymbol{ab}$. Andre bruker symbolet $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ som i praksis betyr det samme.

Et dyadisk produkt mellom to vektorer er enkelt i den forstand at det ikke medfører noen vektoroperasjon. Dersom α og β og γ er skalarer, og $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ og $\boldsymbol{c}$ er vektorer, så har vi for eksempel $(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b})(\gamma \boldsymbol{c}) = \alpha\gamma \boldsymbol{ac} + \beta\gamma \boldsymbol{bc}$.

Generelt har vi at et dyadisk produkt ikke kommuterer $\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba}$. Uttrykk med både skalarprodukt og dyadisk produkt kan regnes ut i hvilken som helst rekkefølge $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{bc})$. I praksis viser det seg at man sparer en betydelig regne-innsats dersom man utfører prikk-operasjonen først, så generelt bør man regne ut dette uttrykket som $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

Vi skal forholde oss til visse konvensjoner som kan oppfattes som naturlige, nemlig at prikken virker mellom den første vektoren som dukker opp på høyre og venstre side, og at ∇-operatoren naturlig deriverer mot høyre. I uttrykket for den konvektivt deriverte $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{F}$ forstår vi derfor at prikken virker mellom $\boldsymbol{v}$ og ∇, og vi forstår at ∇ skal derivere $\boldsymbol{F}$. Regnestykket gir samme svar uavhengig av om vi utfører prikk eller dyadisk produkt først $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v} \cdot (\nabla \boldsymbol{F})$. Her angir parentesen prioritet for multiplikasjon, mens ∇ skal uansett derivere $\boldsymbol{F}$. I praksis viser det seg at man sparer en betydelig regne-innsats dersom man utfører prikk-operasjonen først, så generelt bør man regne ut den konvektivt derivert som $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{F}$.

Litt mer om dyadiske produkter — alternativ konvensjon for gradienten til en vektor

<u>Advarsel: Det som står her er forvirrende!</u>

Alle ser ut til å være enige om at dersom $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er vektorer som ikke medfører en derivasjonsoperasjon så kommer retningen til $\boldsymbol{a}$ før retningen til $\boldsymbol{b}$ i produktet $\boldsymbol{ab}$ eller $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$.

Dersom vi bytter ut $\boldsymbol{a}$ med ∇, som er både en vektor og representerer en derivasjonsoperasjon, så finnes de som hevder at ettersom ∇ også er en operator så skal retningen til ∇ komme etter retningen til $\boldsymbol{b}$ i uttrykket $\nabla\boldsymbol{b}$ eller $\nabla \otimes \boldsymbol{b}$.

Dersom denne alternative konvensjonen benyttes, så må uttrykket for den partikkelderiverte av en vektor-egenskap skrives enten

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{F}$$

eller

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + (\nabla\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{v}$$

eller

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + (\nabla \otimes \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{v}.$$

Uansett skal altså prikken virke mellom ∇ og $\boldsymbol{v}$, mens ∇ skal derivere $\boldsymbol{F}$.

Vi forstår nå at dersom vi setter parentes for å insistere på å ta prikk-produktet først i uttrykket for den konvektivt deriverte så forsvinner forskjellen mellom disse to konvensjonene. Av den grunn kan det være lurt å skrive parentes rundt skalarproduktet $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)$.

Vi forstår nå også hvor viktig det er å sjekke hvilken konvensjon en tekst forholder seg til før vi gir oss i kast med å lese teksten.

I MEK1100 bruker vi konsekvent ikke det som her kalles "alternativ" konvensjon.

I læreboka LH som brukes i MAT1110 skrives Jacobi-matriser (matriser som svarer til gradienten av en vektor) på en måte som ser ut som den alternative konvensjonen. LH bruker imidlertid ikke ∇-symbolet for å operere på vektorer, de anvender ∇ kun på skalarfunksjoner, og de skriver notasjonen $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r})$ for matrisen som svarer til gradienten av en vektor.

Med LH sin matrisenotasjon kan den partikkelderiverte av en vektor-egenskap skrives

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} + \boldsymbol{F}'\boldsymbol{v}$$

hvor både $\boldsymbol{F}$ og $\boldsymbol{v}$ er søylevektorer, hvor $\boldsymbol{F}'$ er en Jacobi-matrise, og hvor operasjonen som skal gjøres mellom $\boldsymbol{F}'$ og $\boldsymbol{v}$ er en matrisemultiplikasjon, dvs. en prikk-operasjon. LH skriver altså prikk for skalarprodukt mellom to vektorer, men ikke noe symbol for det som i praksis er en prikk-operasjon mellom en dyade og en vektor.