Forelesning 19/3–2019 og 22/3–2019 ved Karsten Trulsen
(forelesningsnotater for to etterfølgende forelesninger)

Bevaringslover generelt

I det følgende skal vi utlede diverse bevarlingslover. De tjener til å holde regnskap med hvor mye vi har av "noe" innenfor et kontrollvolum. Dersom det er en endring i mengden av dette "noe" innenfor kontrollvolumet så må det enten skyldes at det er en netto integrert fluks gjennom veggene til kontrollvolumet, eller det må skyldes at det skapes eller tilintetgjøres innenfor kontrollvolumet.

Det er tre grunnleggende forskjellige typer kontrollvolum som vi kan tenke oss å benytte: (I) En fluid partikkel som er en infinitesimal materiell partikkel som forflytter seg med fluidet, (II) et fastholdt endelig kontrollvolum, og (III) et bevegelig endelig kontrollvolum som både kan deformeres og som kan bevege seg uavhengig av fluidet. I MEK1100 skal vi kun se eksempler på de to første typene kontrollvolum. For den tredje typen kontrollvolum trenger vi Reynolds transportteorem som hører til i videregående MEK-emner.

Bevaring av masse: Kontinuitetslikninga

Betingelsen for at masse er bevart kalles kontinuitetslikninga.

Anta vi har et fluid med massetetthet $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ og at fluidet beveger seg med hastighet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$.

I dette tilfellet skal vi betrakte et fastholdt endelig kontrollvolum V avgrenset av en lukket flate S. Vi stiller to krav til vårt kontrollvolum, det skal altså være *fastholdt* og det skal være *vilkårlig*. Kravet om at kontrollvolumet er vilkårlig medfører at resultatene i det følgende skal gjelde uansett hvilken form eller størrelse kontrollvolumet har.

Den totale massen innenfor V er

$$M(t) = \int_V \rho(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}\tau$$

Massen kan endre seg i tid.

Flukstettheten av masse er gitt ved $\rho\boldsymbol{v}$. Den integrerte fluksen ut gjennom den lukkede flaten S er

$$Q = \int_S \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

hvor vi holder oss til konvensjonen at enhetsnormalvektoren $\boldsymbol{n}$ peker ut av kontrollvolumet.

Dersom det ikke skapes eller tilintetgjøres masse innenfor kontrollvolumet så må

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + Q = 0$$

Dette er kontinuitetslikninga på integrert form.

Vi kan ta den tidsderiverte av massen inn under integraltegnet, da blir den til en partiellderivert. Ettersom kontrollvolumet er fastholdt er det ikke bidrag fra tidsderivert av formen til kontrollvolumet

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau$$

Dersom vi benytter Gauss sats for å omgjøre fluksintegralet til et volumintegral får vi

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\tau = 0$$

Ettersom kontrollvolumet er vilkårlig kan ikke verdien til dette integralet avhenge av formen eller størrelsen til kontrollvolumet, følgelig må integranden være lik null

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

Dette er kontinuitetslikninga på differensial form.

Alternative former for kontinuitetslikninga

Dersom vi skriver ut divergensleddet får vi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Dersom vi føyer sammen de to første leddene i likninga ovenfor kjenner vi igjen den partikkelderiverte

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Homogen tetthet

Dersom tettheten er lik overalt sies den å være *homogen*, i så fall har vi $\nabla \rho = \mathbf{0}$ og kontinuitetslikninga reduserer seg til

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Stasjonær tetthet

Dersom tettheten ikke endrer seg i tid sies den å være *stasjonær*, i så fall har vi $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ og kontinuitetslikninga reduserer seg til at masseflukstettheten er divergensfri

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

Spesialtilfelle: Konstant tetthet

Dersom tettheten er både homogen og stasjonær sier vi at den er *konstant*, i så fall må hastigheten være divergensfri

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Spesialtilfelle: Inkompressibelt fluid

Dersom den partikkelderiverte av tettheten er lik null, det vil si at en fluidpartikkel ikke endrer sin tetthet når den beveger seg rundt omkring, så må også hastigheten være divergensfri

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Eksempel: Vann strømmer gjennom en trakt

Husk at innen kategorien "fluid" har vi underkategoriene "væsker" og "gasser". Hovedforskjellen mellom væsker og gasser er at ei væske er i praksis inkompressibel mens en gass lett lar seg komprimere.

Vann er ei væske, så vi kan starte med kontinuitetslikninga for inkompressibelt fluid, nemlig at hastigheten er divergensfri

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Denne kan vi integrere over et kontrollvolum V som er avgrenset av veggene i trakten S_T, et tverrsnitt S_A hvor vannet strømmer inn i trakten med fart v_A, og et tverrsnitt S_B hvor vannet strømmer ut av trakten med fart v_B. La oss anta at strømningshastigheten er vinkelrett på tverrsnittene A og B. Vi innser at det ikke er strømning gjennom traktveggen S_T. Med Gauss lov har vi

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\tau = (\int_{S_T} + \int_{S_A} + \int_{S_B}) \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = -\int_{S_A} v_A\, \mathrm{d}\sigma + \int_{S_B} v_B\, \mathrm{d}\sigma = 0$$

Dersom vi i tillegg antar at farten er konstant i hvert tverrsnitt så kan vi uttrykket resultatet ved arealene A og B

$$v_A A = v_B B$$

Følgelig ser vi at farten er størst i tverrsnittet som er minst.

Eksempel: Biltrafikk

Biltrafikk langs vei er et glimrende eksempel for å få innsikt i løsningene til kontinuitetslikninga. Vi ser for oss en motorvei eller landevei med én eller flere parallelle felt, "tverrsnittet" S er antall felt, "volumet" V er strekning ganger antall felt, "tettheten" er antall biler per volum. Trafikken er inkompressibel dersom avstanden til forankjørende alltid er den samme.

Vanligvis kan biltrafikk lett komprimeres, så vanligvis oppfører den seg som en "gass". Derimot vil tett trafikk kunne oppføre seg som "væske", for eksempel dersom det er nær stillestående kø.

En person som sitter i en bil kan uttale seg om trafikken er inkompressibel. En person som står ved siden av veien kan uttale seg om trafikken er stasjonær. En person i et helikopter eller på en nærliggende bakketopp kan uttale seg om trafikken er homogen.

Eksempel: Inkompressibel trafikk som går fra trefelts vei til ettfelts vei

Vi har at $v_A A = v_B B$ for to snitt S_A og S_B med henholdsvis A og B felt. Dersom vi har $A = 3$ og $B = 1$ så vil $v_B = 3v_A$, trafikken vil gå betydelig fortere straks man kommer ut fra flerfelts vei og inn på ettfelts vei.

Dette er typisk oppførsel dersom man skal kjøre ut fra en stor parkeringsplass og ut på en landevei.

Eksempel: Kompressibel trafikk med stasjonær biltetthet

For stasjonær biltetthet sier kontinuitetslikninga at bilflukstettheten er divergensfri $\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$. Dersom denne integreres over et kontrollvolum og anvendes med tanke på strømning gjennom trakt eller langs veier, så får vi $\rho_A v_A A = \rho_B v_B B$ for to snitt S_A og S_B.

La oss nå anta at trafikken holder fartsgrensene 100 km/h på trefelts motorvei med $A = 3$, og 80 km/h på ettfelts landevei med $B = 1$. I så fall har vi en relasjon for tetthetene $300\rho_A = 80\rho_B$.

Dette er typisk oppførsel for trafikk som holder fartsgrensen i overgangen mellom flerfelts og ettfelts vei, det er god plass mellom bilene på motorveien og tettere trafikk på landeveien.