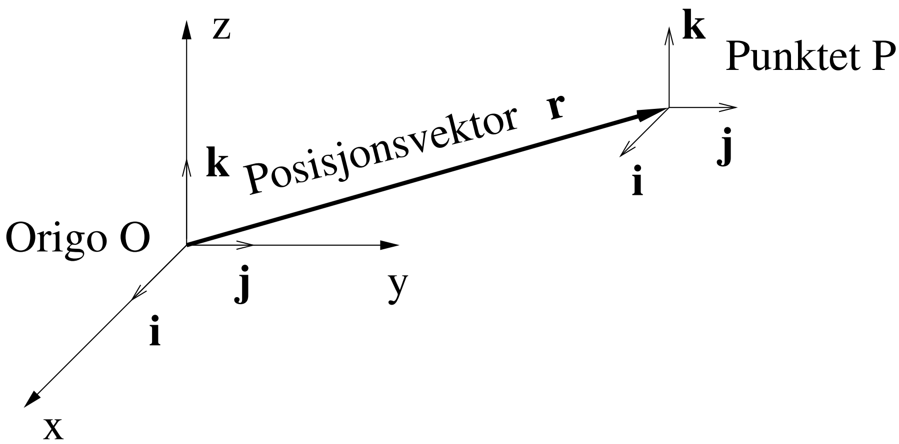
Forelesning 18/1–2019 ved Karsten Trulsen

Eksempler på felt i naturen og deres grafiske framstilling

Posisjonsvektor, koordinater og enhets vektorer i koordinatretningene
De kartesiske koordinatene er velkjent. I tredimensjonalt rom har vi de tre koordinatene x, y og z. De tilhørende aksene står normalt på hverandre. Et punkt P kan angis ved sine koordinater (x, y, z). Origo O er punktet med koordinater $(0, 0, 0)$.

I figuren ser vi en alternativ måte å angi punktet P, nemlig ved hjelp av en posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ som går fra origo O til punktet P.



Spørsmålet er hvordan vi kan representere posisjonsvektoren $\boldsymbol{r}$. Vi skal gjøre dette ved hjelp av enhetsvektorer som peker i koordinatretningene. Disse definerer vi på følgende måte:

> Du står i et punkt. Hold alle koordinatene konstant. Øk én av koordinatene litt. Hvilken retning beveger du deg?

Svaret gir en vektor som peker i retningen til den utvalgte koordinaten. Deretter kan vi sørge for at denne vektoren får enhets lengde.

Dersom vi ser tilbake på figuren ovenfor, og gjør denne øvelsen i punktet P, og deretter i origo O, og så i et hvilket som helst annet punkt, så vil vi oppdage at enhetsvektorene i koordinatretningene til de kartesiske koordinatene er de samme overalt, de er ikke funksjoner av posisjon. Derfor sier vi at det kartesiske koordinatsystemet er **rettlinjet**. Dette er faktisk en av de beste egenskapene til de kartesiske koordinatene!

Vi skal la enhetsvektorene til henholdsvis $\{x, y, z\}$ få navn $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, og de har altså enhets lengde $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$.

Vi kan nå skrive posisjonsvektoren fra O til P som $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Vi ser at koordinatene til P er (x, y, z) og komponentene til posisjonsvektoren til P også er (x, y, z). Vi trenger altså ikke ta stilling til om notasjonen (x, y, z) betyr koordinatene til punktet eller komponentene til posisjonsvektor til punktet. Vi skal straks se at dette ikke gjelder for koordinater som ikke er rettlinjet!

Skalarprodukt, ortogonale vektorer

Se GF kap. 1.4.

La $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ og $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$, da er skalarproduktet $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

Lengden av en vektor, vinkelen mellom to vektorer

Lengden av en vektor kan uttrykkes som $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$.

Vi introduserer vinkelen θ mellom to vektorer slik at $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\cos\theta$. Dersom vinkelen er slik at $\cos\theta = 0$, dvs. vinkel 90°, så sies vektorene å være ortogonale eller å stå "vinkelrett" eller "normalt" på hverandre.

Vi angir ortogonalitet med symbolet $\perp$.

Merk at dersom $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ så er enten $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ eller $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ eller $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, det er meningsløst å snakke om at en null-vektor er ortogonal.

Rettvinklet koordinatsystem

Når alle enhetsvektorene står vinkelrett på hverandre vil multiplikasjonstabellen for skalarproduktet mellom enhetsvektorene ser slik ut:

$\cdot$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

For å finne ut om et koordinatsystem er rettvinklet kan vi undersøke om multiplikasjonstabellen for skalarproduktet mellom enhetsvektorene til koordinatene ser slik ut.

Kryssprodukt, parallelle vektorer

Se GF kap. 1.4.

Kryssproduktet kan vi skrive symbolsk ved hjelp av en determinant

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

og fra dette følger det at $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\sin\theta$.

To vektorer med lengde ulik null er parallelle dersom kryssproduktet er null. Vi angir parallellitet med symbolet $\|$.

Merk at dersom $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = 0$ så er enten $\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{B}$ eller $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ eller $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$, det er meningsløst å snakke om at en null-vektor er parallell.

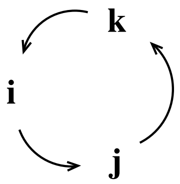
Høyrehånds rettvinklet koordinatsystem

Når alle enhetsvektorene til koordinatene står vinkelrett på hverandre og utgjør et såkalt høyrehåndssystem vil multiplikasjonstabellen for kryssproduktet mellom dem se slik ut:

$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$

For å finne ut om et rettvinklet koordinatsystem er et høyrehåndssystem kan vi undersøke om multiplikasjonstabellen for kryssprodukt mellom enhetsvektorene ser slik ut.

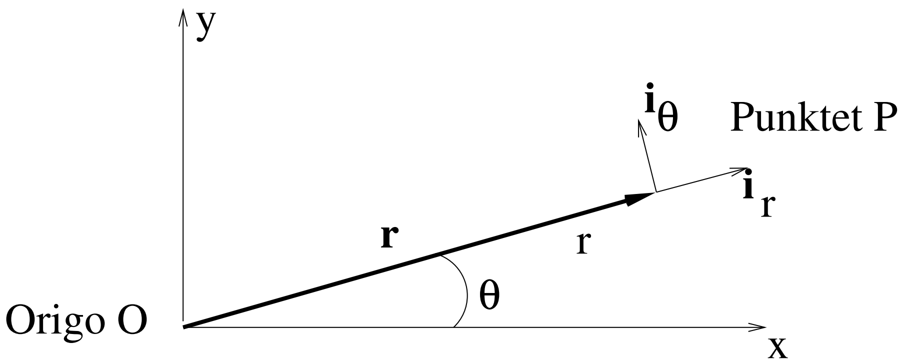
En alternativ måte å representere høyrehåndsregelen, gitt at enhetsvektorene er ortogonale, er ved hjelp av hjulet



Polare koordinater, krumlinjede koordinater

Vi tar utgangspunkt i planet med kartesiske koordinater x og y, men vi ønsker å bruke avstanden r og vinkelen θ som koordinater istedenfor de kartesiske koordinatene. De to koordinatsystemene er relatert med $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.

Punktet P kan nå beskrives enten med kartesiske koordinater (x, y) eller med polare koordinater (r, θ).



La oss se på posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}$. Dersom vi nå følger oppskriften for å finne enhetsvektorene i koordinatretningene i punktet P, så oppdager vi at enhetsvektoren i r-retning er $\boldsymbol{i}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$. Vi kan også finne enhetsvektoren i θ-retning, $\boldsymbol{i}_\theta = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}_r = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}$, men vi trenger ikke uttrykket for den nå. Legg merke til at enhetsvektorene nå er funksjoner av posisjon, de avhenger av vinkelen θ. Da sier vi at det polare koordinatsystemet er **krumlinjet**.

Vi kan nå skrive posisjonsvektor fra O til P ved hjelp av de polare enhetsvektorene i punktet P, og vi legger merke til at vi da kun trenger enhetsvektoren i r-retning, $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r + 0\boldsymbol{i}_\theta$. Vi ser at de polare koordinatene til P er (r, θ) mens komponentene til posisjonsvektoren til P nå er $(r, 0)$. Nå er det altså ikke likegyldig om notasjonen (ξ_1, ξ_2) betyr koordinatene til punktet eller komponentene til posisjonsvektor til punktet. Dette er typisk for krumlinjede koordinater.

Notasjonen (ξ_1, ξ_2) er grei for å angi vektorer og punkter i kartesiske koordinater, men er forvirrende for å skrive vektorer i krumlinjede koordinater fordi det da er uklart om den angir koordinater eller vektorkomponenter.

I dette emnet skal vi jobbe mye med krumlinjede koordinater. Derfor liker vi å skrive vektorer med angivelse av enhetsvektorer i koordinatretningene, og derfor prøver vi stort sett å unngå den tvetydige notasjonen (ξ_1, ξ_2).

Eksempel:
Dersom vi angir punktet P ved hjelp av posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r$, hvor har det da blitt av vinkelen θ?
Svar: Enhetsvektoren $\boldsymbol{i}_r$ er en funksjon av vinkelen, så en tydeligere skrivemåte kunne ha vært $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r(\theta)$.

Posisjon, hastighet, akselerasjon

Se GF kap. 1.4.

Nå skal vi se på en "partikkel" som flytter på seg. Den vil ha en posisjon angitt av en posisjonsvektor som er funksjon av tid $\boldsymbol{r}(t)$. Hastigheten til partikkelen er den tidsderiverte av posisjon $\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$. Akselerasjonen til partikkelen er den tidsderiverte av hastigheten $\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$.

Eksempel: Fri bevegelse i tyngdefeltet
Innenfor et begrenset område kan vi betrakte tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ som en konstant, for eksempel med verdi $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ overalt i samme retning $-\boldsymbol{k}$ som retningen nedover. Dersom vi lar z-aksen peke oppover så har vi $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$.
Vi kan nå skrive $\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$. Ettersom g antas å være konstant så er det trivielt å integrere opp for hastigheten $\boldsymbol{v} = -gt\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0$ hvor $\boldsymbol{v}_0$ er en integrasjonskonstant som er hastigheten til partikkelen ved tid $t = 0$.
Vi kan videre skrive $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} = -gt\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0$, og det er tilsvarende trivielt å integrere opp for posisjonen $\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0$ hvor $\boldsymbol{r}_0$ er en integrasjonskonstant som er posisjonen til partikkelen ved tid $t = 0$.

I dette tilfellet var det ganske enkelt, men generelt kan man lure på om ei likning som for eksempel
$$\boldsymbol{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0$$
er riktig. Vi skal nå vise en meget effektiv måte å sjekke om vi har gjort noe galt. Vi skal sjekke de fysiske dimensjonene. Vi vet at hvert ledd må ha samme dimensjon. Neste gang ...