Forelesning 2/4–2019 ved Karsten Trulsen

Bevaring av bevegelsesmengde — Newtons andre lov

Newtons andre lov sier at et legeme med masse m som blir påvirket av en total kraft $\boldsymbol{F}$ vil få en akselarasjon $\boldsymbol{a}$ i henhold til likninga

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

Vi skal se hvordan denne likninga kan omformuleres for anvendelse på et fluid.

Eulers likning — Newtons andre lov for ideelt fluid

I virkeligheten er friksjon på grunn av viskositet viktig for bevegelsen til et fluid. I det følgende skal vi se bort fra viskositet og friksjon. Da sier vi at fluidet er *ideelt*. Likninga vi ender opp med til slutt kalles Eulers likning.

Dersom vi hadde tatt med viskositet og friksjon hadde vi endt opp med Navier–Stokes likning. Dette gjøres i emnet MEK2200.

I det følgende begrenser vi oss til to typer krefter: trykkraft og tyngdekraft.

Newtons andre lov anvendt på fluidpartikkel

I det følgende skal vi betrakte et kontrollvolum som er en fluidpartikkel. Dette er et infinitesimalt materielt kontrollvolum som beveger seg i henhold til fluidet.

La fluidpartikkelen ha masse m, volum V, være avgrenset av overflate S, tetthet $\rho = \frac{m}{V}$, hastighet $\boldsymbol{v}$ og akselerasjon $\boldsymbol{a}$.

Vi antar i tillegg at fluidpartikkelen er del av et kontinuerlig medium med massetetthet $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ og at mediet beveger seg med hastighet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$. I så fall vet vi at relasjonen mellom partikkelakselerasjonen og fluidhastigheten er $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$.

Summen av alle krefter som virker på fluidpartikkelen er gitt ved trykkraft og tyngdekraft

$$\boldsymbol{F} = -\int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma + m\boldsymbol{g}$$

Dersom vi starter med Newtons andre lov (1)

$$m\boldsymbol{a} = -\int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma + m\boldsymbol{g}$$

og benytter uttrykket for partikkelderivert på venstre side, og benytter Gauss sats på høyre side, så får vi

$$m\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right) = -\int_V \nabla p\,\mathrm{d}\tau + m\boldsymbol{g}$$

Dersom vi nå husker at fluidpartikkelen er infinitesimal, så innser vi at integranden i volumintegralet er i praksis konstant over volumet V, så volumintegralet er lik integranden multiplisert med volumet V. Vi deler på m og bruker at $\rho = \frac{m}{V}$ og får Eulers likning

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

Generelt klarer vi ikke å løse Eulers likning i sin fulle prakt, men noen løsninger er ganske enkle, her kommer to enkle løsninger:

Eksempel: Stillestående fluid $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
Eulers likning reduserer seg nå til

$$\nabla p = \rho \boldsymbol{g}$$

Dersom vi antar at z-aksen peker oppover, så har vi $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$, og vi får på komponentform

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Dersom tettheten er konstant har vi løsningen

$$p = p_0 - \rho g z$$

hvor p_0 er en konstant. Dette er formelen for hydrostatisk trykk.

Eksempel: Typisk vindprofil over bakken: Skjærstrøm
Vind som blåser horisontalt over en horisontal bakke kan beskrives ved modellen

$$\boldsymbol{v} = v(z)\boldsymbol{i}$$

Først legger vi merke til at hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$. Så legger vi også merke til at den konvektive akselererasjonen også forsvinner, vi starter med $\boldsymbol{v} \cdot \nabla = v(z)\frac{\partial}{\partial x}$, og tar deretter $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = v(z)\frac{\partial v(z)}{\partial x}\boldsymbol{i} = \mathbf{0}$. Ettersom vi har verken lokal eller konvektiv akselerasjon står vi kun igjen med to ledd i Eulers likning

$$\nabla p = \rho \boldsymbol{g}$$

som er nøyaktig det samme som vi hadde for stillestående fluid, vi ender altså opp med hydrostatisk trykk

$$p = p_0 - \rho g z$$

Dette er egentlig et pussig resultat: Vi har hydrostatisk trykk i et fluid som på ingen måte står i ro.

Alternativ utledning av Eulers likning for fastholdt kontrollvolum

Advarsel: Det som står her er komplisert!
Unødvendig komplisert i forhold til utledningen ovenfor.
Se gjerne bort fra denne alternative utledningen.

I begynnerundervisning i fysikk lærer man at endringen i bevegelsesmengde $m\boldsymbol{v}$ til en partikkel med masse m er lik den totale krafta $\boldsymbol{F}$ som virker på partikkelen, det er Newtons andre lov.

Nå skal vi betrakte et fastholdt og vilkårlig kontrollvolum V avgrenset av en lukket flate S og gjøre regnskap for den totale bevegelsesmengden innenfor kontrollvolumet. Det er to årsaker til at den totale bevegelsesmengden kan endre seg innenfor kontrollvolumet, delvis fordi det strømmer fluid med bevegelsesmengde gjennom flaten S og delvis fordi det virker krefter på fluidet innenfor kontrollvolumet.

Tettheten av bevegelsesmengde er $\rho\boldsymbol{v}$. Den totale integrerte bevegelsesmengden innenfor V er

$$\int_V \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau$$

Endringen av den totale bevegelsesmengden per tid er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\tau$$

Flukstettheten av bevegelsesmengde er gitt ved $(\rho\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$ som er et dyadisk produkt. Den integrerte fluksen av bevegelsesmengde ut gjennom den lukkede flaten S (husk at flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ peker ut av kontrollvolumet) er

$$\int_S \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

Den totale trykkrafta som virker på kontrollvolumet er

$$-\int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

Den totale tyngdekrafta som virker på kontrollvolumet er

$$\int_V \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\tau$$

Det totale regnskapet for bevegelsesmengde kan derfor skrives

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\tau = -\int_S \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma - \int_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma + \int_V \rho\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\tau$$

Dersom vi bruker Gauss sats for å omgjøre fluksintegralene til volumintegraler, og samler alle ledd på venstre side, får vi

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}) + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) + \nabla p - \rho\boldsymbol{g}\right\}\mathrm{d}\tau = 0$$

(Egentlig er dette litt mer komplisert enn det ser ut som, fordi prikken i divergensen $\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v})$ skal stå mellom ∇ og siste $\boldsymbol{v}$, men siden dyaden $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$ er symmetrisk så spiller det ingen rolle.)

Ettersom kontrollvolumet er vilkårlig kan ikke verdien til dette integralet avhenge av formen eller størrelsen til kontrollvolumet, følgelig må integranden være lik null, og følgelig må vi ha

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) + \nabla p - \rho \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$$

Dette uttrykket kan ekspanderes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\boldsymbol{v} + \rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \boldsymbol{v} \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \nabla p - \rho \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$$

og vi legger merke til at kombinasjonen første og tredje og fjerde ledd er kontinuitetslikninga, derfor kan vi forenkle til

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \nabla p - \rho \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0}$$

som er identisk med Eulers likning som ble utledet ovenfor.