Forelesning 5/4–2019 ved Karsten Trulsen

Grensebetingelse for trykk der hvor vann møter luft

Vi skal utlede en betingelse for trykket på grenseflaten der hvor vann er i kontakt med luft. Vi gjør dette ved hjelp av et passende kontrollvolum som vi lar strekke seg langs grenseflaten slik at den ene siden av kontrollvolumet er i luft og den andre siden er i vann. La disse to sidene begge ha areal A og enhetsnormalvektorer henholdsvis $\boldsymbol{n}$ og $-\boldsymbol{n}$ hvor vi tenker oss at $\boldsymbol{n}$ peker fra vann mot luft. Kontrollvolumet vil også ha sidekanter som krysser grenseflaten mellom vann og luft, vi lar sidekantene til kontrollvolumet ha normalvektorer som er tangent til grenseflaten mellom vann og luft.

La trykket i lufta være p_0 og trykket i vannet være p. I så fall vil den totale trykkrafta på over- og undersidene av kontrollvolumet være $\boldsymbol{F}_A = (p - p_0)A\boldsymbol{n}$. I tillegg kan det i virkeligheten virke en kraft fra sidekantene til kontrollvolumet assosiert med overflatespenning, vi kan kalle disse kreftene $\boldsymbol{F}_S$. Fluidet inni kontrollvolumet har masse m og det vil virke en tyngdekraft $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{g}$. Den totale krafta på kontrollvolumet blir $\boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_S + \boldsymbol{F}_g$.

Vi skal se bort fra overflatespenning slik at vi kan se bort fra kreftene på sidekantene, $\boldsymbol{F}_S = \boldsymbol{0}$. Newtons andre lov sier da at akselerasjon $\boldsymbol{a}$ til kontrollvolumet skal være i henhold til likninga

$$m\boldsymbol{a} = (p - p_0)A\boldsymbol{n} + m\boldsymbol{g}$$

Dersom vi nå lar tykkelsen på kontrollvolumet gå mot null, slik at massen går mot null, samtidig som vi insisterer på at kontrollvolumet ikke skal ha uendelig akselerasjon, så innser vi at trykket må være kontinuerlig på grenseflaten mellom vann og luft:

$$p = p_0 \qquad \text{der hvor vann møter luft}$$

(Dersom vi hadde tatt overflatespenningen med i betraktning så hadde trykket blitt diskontinuerlig mellom vann og luft.)

Eksempel: Trykket i stillestående vann som er i kontakt med luft

Vi bruker formelen for hydrostatisk trykk. Det enkleste er å la $z = 0$ der hvor vannet er i kontakt med lufta. Dersom lufttrykket er p_0 så er trykket i vannet

$$p = p_0 - \rho g z$$

Eksempel: Rør rundt i en kopp delvis fylt med vann — karusellroterende vann

Anta vi rører rundt i koppen slik at vannet beveger seg som en karusell

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$$

hvor vi har latt z-aksen peke oppover, $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$, og hvor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ er en posisjonsvektor. Først legger vi merke til at hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$. Så må vi regne ut den konvektive akselererasjonen. Vi starter med $\boldsymbol{v}\cdot\nabla = -\omega y\frac{\partial}{\partial x}+\omega x\frac{\partial}{\partial y}$. Deretter $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\omega^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$. Fra Eulers likning har vi nå følgende bidrag

$$-\omega^2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

som vi løser på komponentform

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Løsningen er

$$p = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2+y^2) - \rho g z + c$$

hvor c er en konstant.

Nå kan vi i tillegg introdusere kontinuitetsbetingelsen for trykket på den frie overflaten der hvor vann møter luft, der må trykket i vannet være lik lufttrykket p_0. La den frie overflaten være gitt ved $z = \eta(x,y)$. Vi får

$$p_0 = \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2+y^2) - \rho g\eta(x,y) + c$$

hvor c er en konstant. Dermed har vi oppnådd en formel for hvordan den frie overflaten i en kopp med karusell-roterende vann ser ut

$$z = \eta(x,y) = \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2) + z_0$$

hvor z_0 er en konstant. Dette er en paraboloide som krummer opp.

Eksempel: En annen type rotasjonsbevegelse i vann
Anta vi har en roterende bevegelse i vannet gitt ved

$$\boldsymbol{v} = \alpha\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$$

hvor vi har latt z-aksen peke oppover, konstanten α har enhet m^2/s. Først legger vi merke til at hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$. Så må vi regne ut den konvektive akselererasjonen. Vi starter med $\boldsymbol{v}\cdot\nabla = \ldots$. Deretter $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \alpha^2\frac{-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}}{(x^2+y^2)^2}$. Fra Eulers likning har vi nå følgende bidrag

$$\alpha^2\frac{-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

som vi løser på komponentform

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho\alpha^2 x}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\rho\alpha^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Løsningen er

$$p = -\frac{\rho\alpha^2}{2(x^2+y^2)} - \rho g z + c$$

hvor c er en konstant.

Nå kan vi i tillegg introdusere kontinuitetsbetingelsen for trykket på den frie overflaten der hvor vann møter luft, der må trykket i vannet være lik lufttrykket p_0. La den frie overflaten være gitt ved $z = \eta(x, y)$. Vi får

$$p_0 = -\frac{\rho\alpha^2}{2(x^2 + y^2)} - \rho g \eta(x, y) + c$$

Dermed har vi oppnådd en formel for den frie overflaten

$$z = \eta(x, y) = -\frac{\alpha^2}{2g(x^2 + y^2)} + z_0$$

hvor z_0 er en konstant. Denne overflaten krummer ned.

Bernoullis likning

Vi starter med Eulers likning

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \boldsymbol{g}$$

Vi skal nå forsøke å skrive om så mye som mulig av denne vektorlikninga som en gradient, for derved å kunne integrere den opp til en skalarlikning:

Leddet med tyngdens akselerasjon kan skrives $\boldsymbol{g} = -\nabla(gz)$.

Vi antar at hastighetsfeltet er stasjonært, $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$.

Vi antar at tettheten er konstant slik at vi kan skrive $\dfrac{1}{\rho}\nabla p = \nabla \left(\dfrac{p}{\rho}\right)$.

Det konvektivt akselererte leddet kan vi skrive om ved hjelp av identitetene

$$(\nabla \times \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} - \nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\nabla(\overbrace{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}^{\downarrow}) = \nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v} \cdot \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} = \nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} + \nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} = 2\nabla \overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v}$$

og følgelig

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v} + \nabla \left(\frac{v^2}{2}\right)$$

hvor vi har introdusert $\boldsymbol{c} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ for virvlingen til $\boldsymbol{v}$.

Nå kan vi samle alle gradient-ledd under felles gradient-symbol

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = \boldsymbol{0}$$

Vårt mål er nå å kvitte oss med det ene leddet som ikke er en gradient. Dette gjør vi ved å prikke med et infinitesimalt kurveelement $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ langs en strømlinje, husk at strømlinjer var definert ved likninga $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, og vi får

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

Vi står igjen med

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla \mathcal{B} = \mathrm{d}\mathcal{B} = 0$$

hvor

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$$

og følgelig har vi Bernoullis likning

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konstant langs en strømlinje}$$

La oss oppsummere betingelsene for Bernoullis likning:

1. Ideelt fluid — ingen friksjon (viskositet)
2. Stasjonært hastighetsfelt
3. Konstant tetthet

I det tilfellet at hastighetsfeltet er virvelfritt, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, er det ikke nødvendig at kurveelementet $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er langs en strømlinje, og vi får at uttrykket for $\mathcal{B}$ er lik den samme konstanten overalt. Dersom hastighetsfeltet har virvling kan konstanten være forskjellig fra én strømlinje til en annen. Problemet med Bernoullis likning er da at den ikke forteller oss hvordan konstanten endrer seg fra én strømlinje til en annen. Det er viktig å være klar over dette så vi ikke bruker Bernoullis likning i utide. Følgende eksempler illustrerer dette:

Eksempel: Stillestående fluid $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

For stillestående fluid har vi at virvlinga er null, og Bernoullis likning reduserer seg til

$$p = p_0 - \rho g z$$

som er den hydrostatiske trykkformelen.

I dette tilfellet er det ingen virvling, så konstanten i Bernoullis likning er den samme overalt.

Eksempel: Typisk vindprofil over bakken: Skjærstrøm

Vind som blåser horisontalt over en horisontal bakke kan beskrives ved modellen

$$\boldsymbol{v} = v(z)\boldsymbol{i}$$

I dette tilfellet har hastighetsfeltet virvling, $\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{j}$, vi må derfor regne med at Bernoullis likning har forskjellig konstant langs forskjellige strømlinjer. Strømlinjene er i dette tilfellet rette linjer parallell med bakken. Bernoullis likning forteller oss kun at trykket er konstant i en gitt høyde over bakken. Dette er egentlig ikke et spennende resultat.

Legg spesielt merke til at Bernoullis likning ikke forteller oss at trykket er hydrostatisk i dette tilfellet, slik som vi vet at det er ettersom vi tidligere løste problemet direktet fra Eulers likning.

Eksempel: Rør rundt i en kopp delvis fylt med vann
Anta vi rører rundt i koppen slik at vannet beveger seg som en karusell

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = -\omega y \boldsymbol{i} + \omega x \boldsymbol{j}$$

I dette tilfellet har hastighetsfeltet også virvling, $\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$. Derfor må vi regne med at Bernoullis likning har forskjellig konstant langs forskjellige strømlinjer. Strømlinjene er sirkler i horisontale plan med sentrum i rotasjonsaksen. Bernoullis likning forteller kun at trykket er konstant langs en slik sirkel. Dette er ikke et spennende resultat.

Legg spesielt merke til at Bernoullis likning i dette tilfellet ikke forteller oss at overflaten har formen til en paraboloide som krummer opp.

Eksempel: En annen type rotasjonsbevegelse i vann
Til slutt ser vi tilbake på den roterende bevegelsen i vannet gitt ved

$$\boldsymbol{v} = \alpha \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

hvor vi har latt z-aksen peke oppover og konstanten α har enhet m^2/s. Hastighetsfeltet er stasjonært, $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$. Hastighetsfeltet er virvelfritt, $\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Vi vet derfor at vi kan bruke Bernoullis likning med felles konstant overalt. Vi har

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\alpha^2}{2(x^2 + y^2)} + gz = A$$

hvor A er samme konstant overalt. Vi kan løse for trykket

$$p = -\frac{\rho\alpha^2}{2(x^2 + y^2)} - \rho g z + \rho A$$

som er samme resultat som vi tidligere fant direkte fra Eulers likning.

Nå introduserer vi kontinuitetsbetingelsen for trykket på den frie overflaten der hvor vann møter luft, der må trykket i vannet være lik lufttrykket p_0. La den frie overflaten være gitt ved $z = \eta(x, y)$. Vi får

$$p_0 = -\frac{\rho\alpha^2}{2(x^2 + y^2)} - \rho g \eta(x, y) + \rho A$$

Dermed har vi oppnådd en formel for den frie overflaten

$$z = \eta(x, y) = -\frac{\alpha^2}{2g(x^2 + y^2)} + z_0$$

hvor z_0 er en konstant. Denne overflaten krummer ned.