Forelesning 24 den 12/4–2019 ved Karsten Trulsen

Eksperiment "Toricelli" — hvor fort renner vann ut av et kar?

Vi navngir eksperimentet til ære for Evangelista Torricelli (1608–1647) som oppdaget "Toricellis lov" i 1643. Toricelli var inspirert av Galileo Galilei (1564–1642), men levde for tidlig til å være kjent med Newtons lover (Isaac Newton 1642–1726). Vi har lært om Eulers likning som en tilrettelegging av Newtons andre lov for anvendelse på fluider (Leonhard Euler 1707–1783), og om Bernoullis likning som en videre tilrettelegging av Eulers likning dersom visse betingelser er oppfylt (Daniel Bernoulli 1700–1782). Vi skal nå se at Toricellis lov følger fra Bernoullis likning. Dog ble Toricellis lov først oppdaget uten hjelp av Newton/Euler/Bernoulli.

En analogi: Hvor fort faller en ball?

Først skal vi se på en analogi: Vi slipper en ball med masse m som holdes i ro i en høyde h over bakken. Ballen treffer bakken med en fart v. Dersom vi kan se bort fra friksjon i luft, og at ballens bevegelse vil sette lufta i bevegelse, så må den opprinnelige potensielle energien mgh være lik den kinetiske energien ved nedslag $\frac{1}{2}mv^2$. Dette gir at nedslagsfarten er

$$v = \sqrt{2gh} \tag{1}$$

uavhengig av ballens masse.

Vann som renner ut av et åpent kar

Vårt kar er en vertikal sylinder med diameter $D = 17$ cm, åpent i toppen og lukket i bunnen. Gjennom bunnen er det boret et lite utløpshull med diameter $d = 1$ cm.

Den frie overflaten er i kontakt med luft i en høyde h over bunnen. Vannet renner ut av utløpshullet kommer umiddelbart i kontakt med luft. Følgelig vet vi at vanntrykket øverst og nederst i vannsøylen må være lik lufttrykket, p_0.

Overflaten synker med synkefart V, og vi innser relasjonen mellom h og V

$$V = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

(minustegn fordi V er en positiv fart og høyden h avtar).

Det kan innvendes at med en fri overflate som synker så har vi ikke stasjonære betingelser. Vi skal anta at overflaten synker så langsomt at vi i praksis betrakter eksperimentet som stasjonært. Vi skal snart se at dette er en god tilnærming så lenge utløpshullet er lite i forhold til beholderens tverrsnitt.

Vi kan finne en relasjon mellom synkefarten V på overflaten og utløpsfarten v på bunnen ved hjelp av kontinuitetslikninga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3}$$

Med antakelsen om konstant tetthet faller de to første leddene bort og vi har divergensfri hastighet $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Dersom dette integreres i et volumintegral over alt vann i karet, og vi anvender Gauss sats, får vi at den integrerte volumfluksen gjennom overflaten er lik den integrerte volumfluksen gjennom utløpshullet

$$V\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = v\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

eller

$$v = V \left(\frac{D}{d}\right)^2. \tag{4}$$

Vi har antatt at farten er konstant i tverrsnittet på overflaten, og konstant i tverrsnittet i utløpet.

La oss velge en strømlinje fra overflaten ved $z = h$ til utløpshullet $z = 0$. Husk at lufttrykket er likt $p = p_0$ begge steder. Følgelig gir Bernoullis likning at

$$\frac{v^2}{2} = \frac{V^2}{2} + gh. \tag{5}$$

Dersom vi substituerer inn (4) får vi

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} \approx \sqrt{2gh}. \tag{6}$$

Tilnærmingen er meget god for vårt eksperiment, med $D = 17$ cm og $d = 1$ cm begår vi en feil i femte siffer!

Vi har nå utledet Toricellis lov $v = \sqrt{2gh}$. Det er egentlig ganske pussig at vi ender opp med samme resultat som fallfarten til en ball i likning (1)!

Dersom vi uttrykker Toricellis lov ved hjelp av synkefarten istedenfor utløpsfarten, og vi benytter relasjonen (2) for å eliminere V, ender vi opp med den separable differensiallikninga

$$-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\left(\frac{D}{d}\right)^2 = \sqrt{2gh}.$$

Akkurat denne likninga er brukt som eksempel på hvordan man kan løse separable differensiallikninger i Tom Lindstrøm sin bok "Kalkulus", eksempel 10.4.5 (forrige utgave).

Dersom vi integrer fra tiden t_0 med høyde h_0 til tiden t med høyde h

$$\int_{h_0}^{h} \frac{\mathrm{d}h'}{\sqrt{h'}} = -\int_{t_0}^{t} \sqrt{2g}\left(\frac{d}{D}\right)^2 \mathrm{d}t'$$

får vi

$$2\left(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}\right) = -\sqrt{2g}\left(\frac{d}{D}\right)^2 \Delta t \tag{7}$$

eller

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \sqrt{\frac{g}{2}}\left(\frac{d}{D}\right)^2 \Delta t$$

eller

$$h = h_0 - \sqrt{2gh_0}\left(\frac{d}{D}\right)^2 \Delta t + \frac{g}{2}\left(\frac{d}{D}\right)^4 (\Delta t)^2 \tag{8}$$

hvor $\Delta t = t - t_0$.

Overflaten synker altså som en parabel med hensyn på tid.

Vi kan derivere med hensyn på tid

$$V = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gh_0}\left(\frac{d}{D}\right)^2 - g\left(\frac{d}{D}\right)^4 \Delta t \tag{9}$$

Overflatens synkefart avtar altså lineært.

Demonstrasjonsforsøk:

Målingene er lagt inn i et regneark `Toricelli.xls`.

Beregning I er første ledd på høyre side av (8), beregning II er summen av begge ledd på høyre side av (8), avvik er relativ differanse mellom beregnet og målt Δh.

Hvor stor feil har vi begått ved å anta at hastigheten er stasjonær?

Vi starter med Eulers likning

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{k} \tag{10}$$

Nå skal vi estimere hvor stor feil vi gjør ved å anta stasjonært hastighetsfelt. Vi må finne ut hvor stort leddet $\partial \boldsymbol{v}/\partial t$ er i forhold til de andre leddene. Det enkleste er å sammenlikne dette leddet med siste ledd på høyre side.

Fra likning (9) har vi at den tidsderiverte av synkefarten er

$$\left|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right| = g\left(\frac{d}{D}\right)^4$$

og fra likning (4) har vi at den tidsderiverte av utløpsfarten er

$$\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right| = g\left(\frac{d}{D}\right)^2$$

og disse skal altså sammenliknes med siste ledd i (10) som er av størrelsesorden g.

Det er opplagt at utløpet er det mest sensitive stedet og feilen er av relativ orden $\left(\frac{d}{D}\right)^2$ For $D = 17$ cm og $d = 1$ cm er dette 0.0035 som betyr at feilen burde ligge på like under én prosent. Dette kan sammenliknes med feilene vi fant i eksperimentet. Vi konkluderer med at antakelsen om stasjonært felt burde medføre en feil som er nesten like stor som den feilen som vi måler i eksperimentet! Det er med andre ord god grunn til å anta at den viktigste feilkilden i eksperimentet er at vi bruker en stasjonær modell for å beskrive et ikke-stasjonært fenomen.