Forelesning 26 den 26/4–2019 ved Karsten Trulsen

Husk fra sist:
Den totale varmeflukstettheten er

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_s + \boldsymbol{H}_l = \rho E(T)\boldsymbol{v} - k\nabla T$$

Varmetransportlikninga er

$$\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla T = \kappa\nabla^2 T + \frac{q}{\rho c}$$

Vi skal stort sett anta at varmetransport-prosessene vi skal beskrive vil foregå under betingelser av konstant trykk, derfor skriver vi den spesifikke varmetettheten $E(T)$ som funksjon kun av temperaturen T. Den *spesifikke varmekapasiteten* $c = \frac{\partial E}{\partial T}$ er følgelig det som ofte betegnes med c_p beregnet for konstant trykk.

(I virkeligheten er varmetettheten E en funksjon av to termodynamiske tilstandsvariabler, men det skal vi ikke bekymre oss for her da vi stort sett skal anta at trykket er konstant.)

NB! Det står feil i noen lærebøker!

Det står feil på side 132 i Matthews der han antyder at den spesifikke termiske energien er gitt ved produktet av c og T, han impliserer nemlig $E = cT$. Det hadde blitt riktig dersom han hadde ment endringen i termisk energi for en liten endring av temperatur, $\Delta E = c\Delta T$, men det er feil dersom han mener den absolutte termiske energien.

Tilsvarende sto det feil i forrige utgave av Gjevik & Fagerland (2017), i fasiten til oppgave 2 i kapittel 11.3, hvor ble det antydet at man skulle bruke den feilaktige formelen i Matthews. Dette er delvis rettet opp i nåværende utgave (2018), bortsett fra at det i fasiten på siste delpunkt burde ha stått $(T - T_0)$ istedenfor T.

Eksempel: Finn varmefluksen gjennom en flate.

Dersom flaten har enhets normalvektor $\boldsymbol{n}$ så vil komponenten av $\boldsymbol{H}$ som går gjennom flaten være

$$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n} = \rho E(T)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} - k\nabla T\cdot\boldsymbol{n}$$

Dette eksemplet er litt utilfredsstillende siden vi ikke kjenner uttrykket for $E(T)$, derfor har vi ikke mulighet for å gi noe bedre svar.

Eksempel: Finn netto varmefluks ut av et kontrollvolum.

La kontrollvolumet V være avgrenset av den lukkede flaten S. Den integrerte varmefluksen ut av kontrollvolumet er

$$\int_S \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_S (\rho E(T)\boldsymbol{v} - k\nabla T)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

La oss avgrense denne problemstillingen ytterligere ved å anta strømninghastighet og temperaturgradient utelukkende i x-retning, $\boldsymbol{v} = v_0\boldsymbol{i}$ hvor v_0 er en konstant, og $T = T(x)$. La flaten S ha sider som vender mot negativ og positiv x-akse med like store flater A, henholdsvis på venstre side $x = a$ og på høyre side $x = b$. Vi får da

$$\int_S \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = A \left[\rho E(T) v_0 - k \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \right]_a^b$$

La oss i tillegg anta at temperaturen på venstre $x = a$ side er T_0 hvor temperaturgradienten er $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \beta > 0$, og at temperaturen på høyre side $x = b$ er $T_0 + \Delta T$ hvor temperaturgradienten er $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0$. Dette tilsvarer for eksempel at kontrollvolumet blir forsøkt oppvarmet av en vifteovn som står på venstre side. Vi får da

$$\int_S \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = A \left[\rho E(T_0 + \Delta T) v_0 - \rho E(T_0) v_0 + k\beta \right] \approx A \left[\rho c \Delta T v_0 + k\beta \right]$$

hvor vi har benyttet uttrykket $\Delta E \approx c\Delta T$.

Eksempel: Dersom vi betrakter luft under vanlige betingelser i et hus, hvor fort skal konveksjonsfarten være for at konveksjon er mer effektiv for å transportere varme enn ledning?

Vi bruker resultatet i forrige eksempel. Vi antar at en karakteristisk temperaturdifferanse kan være $\Delta T = -10$ K og at en karakteristisk temperaturgradient kan være $\beta = 10$ K/m. For luft har vi massetetthet $\rho = 1.2$ kg/m^3, spesifikk varmekapasitet $c = c_p = 1.012$ J/(g K) og termisk konduktivitet $k = 0.025$ J/(m s K). Vi får

$$v_0 = -\frac{k\beta}{\rho c \Delta T} = \frac{0.025 \cdot 10}{1.2 \cdot 1012 \cdot 10} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2.1 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 21 \frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Vi bør med andre ord ha respekt for hvor avkjølende en kald trekk kan være, og hvor effektiv en varmluftsvifte kan være for å gi hurtig oppvarming!

Eksempel: En stav har en gitt temperaturfordeling, vil temperaturen øke eller avta? Finn den integrerte varmefluksen.

En stav strekker seg fra $x = 0$ til $x = L$, har konstant tverrsnitt A, termisk konduktivitet k, varmediffusivitet κ, og ved tiden $t = t_0$ er temperaturfordelingen $T(x, t_0) = T_0 + \alpha x^2$ hvor α er en positiv konstant.

For å finne ut om temperaturen vil øke, avta eller holde seg konstant regner vi ut den romlige dobbelderiverte $\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{t=t_0} = 2\alpha$. Ettersom staven antas å være av fast stoff så er det ingen konveksjonshastighet, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Varmelikninga gir oss da for tidspunktet $t = t_0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2\alpha\kappa > 0$$

Temperaturen vil altså øke.

For å finne den integrerte varmefluksen gjennom et tverrsnitt S av staven i $x = x_0$ har vi

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_l = -k\nabla T = -k\frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{i} = -2\alpha x$$

og den integrerte varmefluksen gjennom tverrsnittet blir

$$\int_S \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{i} \, \mathrm{d}\sigma = -2\alpha x_0 A$$

Varmefluksen går altså mot venstre.

Eksempel: En stav har pålagt temperaturer i hver ende. Finn temperaturfordlingen ved likevekt og finn den integrerte varmefluksen.

En stav strekker seg fra $x = 0$ til $x = L$, har konstant tverrsnitt A, termisk konduktivitet k, varmediffusivitet κ, og har pålagt temperatur $T = T_0$ ved $x = x_0$ og $T = T_0 + \Delta T$ ved $x = x_L$. Ettersom staven antas å være av fast stoff så er det ingen konveksjonshastighet, $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. En likevektsløsning endrer seg ikke i tid, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Varmelikninga gir oss da

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

med randkrav $T = T_0$ ved $x = x_0$ og $T = T_0 + \Delta T$ ved $x = x_L$. Legg spesielt merke til at varmediffusiviteten ikke spiller noen rolle.

Løsningen er

$$T(x) = \frac{\Delta T}{L} x + T_0.$$

Den integrerte varmefluksen gjennom et tverrsnitt S av staven for vilkårlig x er

$$Q = \int_S \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{i}\, \mathrm{d}\sigma = -k \frac{\Delta T}{L} A$$

Legg merke til at dette svaret er uavhengig av x, det er et uttrykk for at det ikke hoper seg opp varme noe sted i staven.

Eksempel: Hvor tykt må et vindu eller en yttervegg være for å tilfredsstille myndighetenes krav?

For å angi den isolerende evnen til vinduer, vegger osv. bruker man ofte en størrelse som kalles U-verdi som er definert ved

$$U = \left| \frac{Q}{A \Delta T} \right| = \frac{k}{L}$$

hvor vi har brukt forrige eksempel som motivasjon. Se no.wikipedia.org/wiki/U-verdi. Typiske krav er $U \leq 1.2$ W/(m^2 K) for vinduer og $U \leq 0.18$ W/(m^2 K) for yttervegger.

Vi kan nå regne ut hva som er minste tykkelse av diverse materialer, for at myndighetenes krav om isolasjon i vinduer og vegger skal være oppfylt:

Størrelse	k	L_{vindu}	L_{vegg}
Enhet	W/(m K)	m	m
Glass	1	0.83	5.6
Tørr snø	0.11	0.092	0.61
Luft	0.025	0.02	0.14

Vi innser at det ikke er vanskelig å lage en iglo som tilfredsstiller myndighetenes krav!

Vi innser også at glass må være noe av det mest vanvittige byggematerialet dersom det alene skal gi den nødvendige varme-isolasjonen.

Luft hadde vært et særdeles godt byggemateriale dersom det ikke hadde den leie tendensen til å blåse. Ett av eksemplene ovenfor viser hvor liten konveksjonshastigheten trenger å være for at konveksjon er mer effektiv en varmeledning for å transportere varme.

Et byggemateriale som holder luft i ro, for eksempel dobbel- eller trippel-glass, eller porøs luftholdig isolasjon, kan være smart for å oppnå ønsket isolerende evne uten at vegger og vinduer trenger å bli alt for tykke. Vi innser også at varme klær bør være laget av stoffer som inneholder mye luft som ikke får lov til å bevege seg.