Forelesning 27 den 30/4–2019 ved Karsten Trulsen

Mer generelle koordinater

(Vi baserer oss i stor grad på M kapittel 6, og forholder oss fullt ut til LH kapittel 3.9, 6.10 og 6.12. Vi baserer oss i mindre grad på GF kapittel 8.)

Vi skal nå forklare hvordan vi kan benytte andre koordinatsystemer enn de vanlige kartesiske. I MAT1110 har dette blitt diskutert i forbindelse med koordinattransformer for å lette den tekniske beregningen av flate- og volumintegraler. Vi skal nå gjøre dette litt mer generelt og beskrive hvordan vi også kan uttrykke vektordifferensial-operasjoner som gradient, divergens og virvling i andre koordinatsystemer.

Kartesiske koordinater

Først må vi bli fortrolig med hva som er de tre viktigste egenskapene til enhetsvektorene $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ med retning langs aksene til de vanlige kartesiske koordinatene $\{x, y, z\}$.

De er ortogonale:

$\cdot$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

De utgjør et høyrehåndsystem:

$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$

Og de er rettlinjet:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\frac{\partial}{\partial x}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$

Vi kan lage en algoritme for å finne vektorer langs koordinataksene: Først skriver vi uttrykket for posisjonsvektor

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

Så betrakter vi en liten forflytning i forhold til posisjonsvektor, dette beskriver vi ved det totale differensialet

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\mathrm{d}z = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$$

Regelen for å finne en vektor langs en koordinatakse blir da:

> Vi står på et sted $\boldsymbol{r}$, hold alle koordinatene konstant bortsett fra én som økes litt, hvilken retning beveger vi oss?

Svaret på dette spørsmålet kan leses ut fra det totale differensialet, og forteller oss hva som er vektoren langs en koordinatakse.

Vi ser for eksempel at

$$\boldsymbol{i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \qquad \boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \qquad \boldsymbol{k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}$$

Nye koordinater uttrykt ved de kartesiske koordinatene.
Vi introduserer nå nye koordinater $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ med tilhørende enhetsvektorer $\{\boldsymbol{i}_\alpha, \boldsymbol{i}_\beta, \boldsymbol{i}_\gamma\}$ langs koordinataksene.

Vi starter med å uttrykke de gamle koordinatene ved hjelp av de nye:

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma) \qquad y = y(\alpha, \beta, \gamma) \qquad z = z(\alpha, \beta, \gamma)$$

Posisjonsvektor kan nå skrives ved hjelp av de nye koordinatene og de gamle enhetsvektorene langs de kartesiske koordinataksene

$$\boldsymbol{r} = x(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{i} + y(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{j} + z(\alpha, \beta, \gamma)\boldsymbol{k}$$

Neste skritt er å bruke oppskriften skissert ovenfor for å finne de nye enhetsvektorene. Nå er det imidlertid ikke lenger sikkert at de tre partiellderiverte $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$ har enhets lengde, derfor introduserer vi såkalte *skaleringsfaktorer*

$$h_\alpha = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\right|, \qquad h_\beta = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\right|, \qquad h_\gamma = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}\right|$$

Enhetsvektorene blir dermed

$$\boldsymbol{i}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}, \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \frac{1}{h_\beta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}, \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \frac{1}{h_\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}$$

Vi skal begrense oss til ortogonale høyrehåndsystemer
Det vil være nødvendig å sjekke at koordinatene oppfyller betingelsene for skalar- og kryssprodukt. I utgangspunktet skulle man tro at det var nødvendig å sjekke alle 18 elementer i multiplikasjonstabellene for skalar- og kryssprodukt, men heldigvis er det tilstrekkelig å sjekke kun fire betingelser. For å sjekke ortogonalitet er det tilstrekkelig å sjekke

$$\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = 0, \qquad \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0, \qquad \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0$$

Dersom ortogonalitet allerede er oppfylt så er det tilstrekkelig å sjekke ett kryssprodukt for å sikre at det er et høyrehåndsystem

$$\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\gamma$$

Eksempel: Vis at dersom de fire betingelsene ovenfor er oppfylt, så er betingelsene $\boldsymbol{i}_\beta \times \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\alpha$ og $\boldsymbol{i}_\gamma \times \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\beta$ allerede oppfylt.
Vi kan substituere bort $\boldsymbol{i}_\gamma$ og bruke formelen $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{i}_\beta \times \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\beta \times (\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta) = \boldsymbol{i}_\alpha \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\beta - \boldsymbol{i}_\beta \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\alpha$$

$$\boldsymbol{i}_\gamma \times \boldsymbol{i}_\alpha = (\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta) \times \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\beta \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\alpha - \boldsymbol{i}_\alpha \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}_\beta$$

Eksempel: Koordinater som ikke er ortogonale.

$$x = \alpha + \beta \qquad y = \beta \qquad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = (\alpha + \beta)\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ og

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \boldsymbol{i} \qquad h_\alpha = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{i}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \qquad h_\beta = \sqrt{2} \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{k} \qquad h_\gamma = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{k}$$

Vi har $\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ som betyr at koordinatene ikke er ortogonale.

Eksempel: Ortogonale koordinater som ikke er et høyrehåndsystem.

$$x = \beta \qquad y = \alpha \qquad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = \beta\boldsymbol{i} + \alpha\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ og

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = \boldsymbol{j} \qquad h_\alpha = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\alpha = \boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \boldsymbol{i} \qquad h_\beta = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{k} \qquad h_\gamma = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{k}$$

Vi har $\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0$ som betyr at koordinatene er ortogonale. Derimot har vi $\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta = -\boldsymbol{i}_\gamma$ som betyr at dette ikke er et høyrehåndsystem.

Dette er et venstrehåndsystem.

Eksempel: Et ortogonalt høyrehåndsystem som er rettlinjet.

$$x = \alpha + \beta \qquad y = -\alpha + \beta \qquad z = \gamma$$

Dette gir posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = (\alpha + \beta)\boldsymbol{i} + (-\alpha + \beta)\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$ og

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) \qquad h_\alpha = \sqrt{2} \qquad \boldsymbol{i}_\alpha = \frac{\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \qquad h_\beta = \sqrt{2} \qquad \boldsymbol{i}_\beta = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma} = \boldsymbol{k} \qquad h_\gamma = 1 \qquad \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{k}$$

Vi har $\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = \boldsymbol{i}_\beta \cdot \boldsymbol{i}_\gamma = 0$ som betyr at koordinatene er ortogonale. Dessuten har vi $\boldsymbol{i}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta = \boldsymbol{i}_\gamma$ som betyr at dette er et høyrehåndsystem. I tillegg har vi at alle de nye koordinatvektorene er konstant, uavhengige av koordinatene, som betyr at systemet er rettlinjet.

Infinitesimalt kurveelement

Vi kan nå skrive det infinitesimale kurveelementet

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha + h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta + h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma$$

hvor vi kan betrakte hvert ledd som bidraget fra sin respektive koordinat

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\mathrm{d}\alpha = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \beta}\mathrm{d}\beta = h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\gamma = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \gamma}\mathrm{d}\gamma = h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma$$

Gradient

La f være et skalarfelt. Vi kan finne gradienten til f fra det totale differensialet

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

som vi skal kreve er lik den retningsderiverte med gradienten

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Ettersom vi har begrenset oss til ortogonale koordinater så er det enkelt å se at gradienten av en skalar er

$$\nabla f = \frac{\boldsymbol{i}_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\boldsymbol{i}_\beta}{h_\beta}\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\boldsymbol{i}_\gamma}{h_\gamma}\frac{\partial f}{\partial \gamma}$$

Tilsvarende kan vi skrive uttrykket for del-operatoren

$$\nabla = \frac{\boldsymbol{i}_\alpha}{h_\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\boldsymbol{i}_\beta}{h_\beta}\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\boldsymbol{i}_\gamma}{h_\gamma}\frac{\partial}{\partial \gamma}$$

I dette uttrykket tenker vi oss at derivasjonsoperasjonene skal virke mot høyre for å anvendes på det som måtte komme til høyre for del-operatoren.

Flateelement

Vi har tidligere diskutert (forelesning 10 den 15.februar) at dersom en flate er parameterisert med to skalarer v og w, slik at hvert punkt på flaten er gitt ved 3D posisjonsvektor $\boldsymbol{r}(v, w)$, så kan vi betrakte infinitesimale flateelement spent ut av de infinitesimale tangentvektorene

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}w$$

I så fall kan vi beregne flatenormalvektor og det infinitesimale flateelementet ved å ta kryssproduktet

$$\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \pm \mathrm{d}\boldsymbol{r}_v \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_w = \pm \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Det mest naturlige vil nå være å se på flateelementer som er parallellogrammer som spennes ut av to av de tre kurveelementene $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta$ og $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\gamma$. Vi skal la de to utspennende vektorene være leddene i uttrykket for det infinitesimale kurveelementet, for eksempel de tre opplagte flatene

$$\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha \times h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta = h_\alpha h_\beta \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\gamma = h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta \times h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma = h_\beta h_\gamma \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\gamma \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha = h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma \times h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha = h_\gamma h_\alpha \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\gamma\mathrm{d}\alpha \end{cases}$$

Det er verdt å merke seg hvordan dette blir gjort i MAT1110 (eksempel 6.12.4 på side 684–686) uten å kreve at koordinatene er verken ortogonale eller høyrehåndsystem: De ender opp med å beregne Jacobi-determinant.

Volumelement

Vi spenner ut et volumelement med form av et parallellepiped ved hjelp av tre vektorer. Dersom vi lar de tre utspennende vektorene være $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\beta$ og $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\gamma$ så får vi

$$\mathrm{d}\tau = h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha \mathrm{d}\alpha \times h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \mathrm{d}\beta \cdot h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \mathrm{d}\gamma = h_\alpha h_\beta h_\gamma \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma$$

Det er verdt å merke seg hvordan dette blir gjort i MAT1110 (Teorem 6.10.1 på side 663) uten å kreve at koordinatene er verken ortogonale eller høyrehåndsystem: De ender opp med å beregne en Jacobi-determinant. Vårt produkt av tre skaleringsfaktorer er lik denne Jacobi-determinanten.