Forelesning 28 den 3/5–2019 ved Karsten Trulsen

Divergens i krumlinjede koordinater

Vi skal "definere" divergensen i et punkt ($\boldsymbol{r}_0$) med følgende grenseoppgang

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \tag{1}$$

hvor S er en lukket flate som omslutter et volum V, og hvor grenseoppgangen er slik at volumet skrumper inn til punktet ($\boldsymbol{r}_0$).

Vi skal nå tenke oss at volumet vi skal integrere over kan ha en komplisert form i de "opprinnelige" kartesiske koordinatene, men dersom vi representerer volumet i "nye" krumlinjede koordinater $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ er det en boks med sentrum i $\{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$ og med sidekanter $\{\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma\}$. Poenget med de nye koordinatene er å få en enklere parameterisering av volumet.

Når vi snakker om "volumet", så mener vi det opprinnelige volumet i det kartesiske koordinatsystemet, dette skal vi nå regne ut ved hjelp av de nye koordinatene

$$V = \int \mathrm{d}\tau = \iiint h_\alpha h_\beta h_\gamma \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma \approx h_\alpha h_\beta h_\gamma \Delta\alpha \Delta\beta \Delta\gamma$$

La oss nummerere sidene som en vestlig terning (høyrehånds terning med sum 7 på motstående sider), og splitte opp fluksintegralet i bidrag fra hver side

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{6} \int_{S_i} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

1. Flaten er $\alpha = \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_\alpha$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_\alpha(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta, \gamma)$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\beta h_\gamma \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta\Delta\gamma$.

$$\int_{S_1} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma \approx [h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta\Delta\gamma$$

2. Flaten er $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_\beta$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_\beta(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\alpha h_\gamma \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\alpha\Delta\gamma$.

3. Flaten er $\gamma = \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_\gamma$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_\gamma(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\alpha h_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\alpha\Delta\beta$.

4. Flaten er $\gamma = \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}_\gamma$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -v_\gamma(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\alpha h_\beta \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[-h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\alpha\Delta\beta$.

5. Flaten er $\beta = \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}_\beta$, på flaten har vi $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -v_\beta(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\alpha h_\gamma \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[-h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\alpha\Delta\gamma$.

6. Flaten er $\alpha = \alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}$, enhetsnormalvektor $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{i}_\alpha$, på flaten har vi $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} = -v_\alpha(\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}, \beta_0, \gamma_0)$ og $\mathrm{d}\sigma = h_\beta h_\gamma \mathrm{d}\beta\mathrm{d}\gamma$, den integrerte fluksen ut av flaten er omtrent $[-h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{(\alpha_0-\frac{\Delta\alpha}{2},\beta_0,\gamma_0)}\,\Delta\beta\Delta\gamma$.

Så summerer vi motstående flater

Side 1 og 6:

$$(\int_{S_1} + \int_{S_6})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \approx [h_\beta h_\gamma v_\alpha]_{\alpha_0-\frac{\Delta\alpha}{2}}^{\alpha_0+\frac{\Delta\alpha}{2}}\,\Delta\beta\Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h_\beta h_\gamma v_\alpha\right)\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\gamma$$

Side 2 og 5:

$$(\int_{S_2} + \int_{S_5})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \approx [h_\alpha h_\gamma v_\beta]_{(\alpha_0,\beta_0-\frac{\Delta\beta}{2},\gamma_0)}^{(\alpha_0,\beta_0+\frac{\Delta\beta}{2},\gamma_0)}\,\Delta\alpha\Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_\alpha h_\gamma v_\beta\right)\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\gamma$$

Side 3 og 4:

$$(\int_{S_3} + \int_{S_4})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \approx [h_\alpha h_\beta v_\gamma]_{(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0-\frac{\Delta\gamma}{2})}^{(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0+\frac{\Delta\gamma}{2})}\,\Delta\alpha\Delta\beta \approx \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(h_\alpha h_\beta v_\gamma\right)\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\gamma$$

Legg merke til at $\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\gamma$ er felles faktor for fluksintegralet i teller og for volumet i nevner i den opprinnelige formelen for divergens. Videre blir alle tilnærminger vilkårlig nøyaktige i grensen at de tre delta-størrelsene blir vilkårlig små.

Til slutt har vi

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(h_\beta h_\gamma v_\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_\alpha h_\gamma v_\beta\right) + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(h_\alpha h_\beta v_\gamma\right)\right\}$$

Virvling i krumlinjede koordinater

Vi skal "definere" virvlingen i et punkt $(\boldsymbol{r}_0)$ med følgende grenseoppgang

$$\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \lim_{A \to 0} \frac{1}{A} \oint_{\lambda} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

hvor λ en lukket kurve som omslutter og avgrenser en flate S med areal A, og hvor grenseoppgangen er slik at flaten skrumper inn til punktet $(\boldsymbol{r}_0)$. Flaten S har enhets normalvektor $\boldsymbol{n}$. Kurven λ og flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ er orientert i henhold til høyrehåndsregelen. Integralet gir sirkulasjonen rundt den lukkede kurven λ.

Vi skal nå tenke oss at den lukkede kurven λ kan ha en komplisert form i de "opprinnelige" kartesiske koordinatene, men dersom vi representerer flaten i "nye" krumlinjede koordinater $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ er det et rektangel med sentrum i $\{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$ orientert parallelt med $\beta\gamma$-planet og med sidekanter $\Delta\beta$ og $\Delta\gamma$. Vi har normalvektoren $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_\alpha$ i positiv α-retning, og orienterer kurven λ i henhold til høyrehåndsregelen. Poenget med de nye koordinatene er å få en enklere parameterisering av flaten.

Når vi snakker om "arealet", så mener vi det opprinnelige arealet i det kartesiske koordinatsystemet, dette skal vi nå regne ut ved hjelp av de nye koordinatene

$$A = \int_S \mathrm{d}\sigma = \iint h_\beta h_\gamma \mathrm{d}\beta \mathrm{d}\gamma \approx h_\beta h_\gamma \Delta\beta\Delta\gamma$$

La oss nummerere sidene i integrasjonsretning med 1 nederst, og splitte opp sirkulasjonsintegralet i bidrag fra hver side

$$\oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\lambda_i} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

1. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $|\beta - \beta_0| \leq \frac{\Delta\beta}{2}$ og $\gamma = \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \,\mathrm{d}\beta$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\beta v_\beta \,\mathrm{d}\beta$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $[h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\beta$.

2. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \,\mathrm{d}\gamma$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = h_\gamma v_\gamma \,\mathrm{d}\gamma$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $[h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\gamma$.

3. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 + \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -h_\beta \boldsymbol{i}_\beta \,\mathrm{d}\beta$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -h_\beta v_\beta \,\mathrm{d}\beta$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $[-h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\beta$.

4. Siden er $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}$ og $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\Delta\gamma}{2}$. Det infinitesimale kurveelementet er $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \,\mathrm{d}\gamma$. Langs siden har vi $\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -h_\gamma v_\gamma \,\mathrm{d}\gamma$. Kurveintegralet langs siden er omtrent $[-h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0, \beta_0 - \frac{\Delta\beta}{2}, \gamma_0)} \Delta\gamma$.

Dersom vi summerer motstående sider får vi

Side 1 og 3:

$$[h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 - \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\gamma - [h_\beta v_\beta]_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 + \frac{\Delta\gamma}{2})} \Delta\beta \approx -\frac{\partial}{\partial\gamma} (h_\beta v_\beta)\bigg|_{(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)} \Delta\beta\Delta\gamma$$

Side 2 og 4:

$$[h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0,\beta_0+\frac{\Delta\beta}{2},\gamma_0)}\,\Delta\gamma - [h_\gamma v_\gamma]_{(\alpha_0,\beta_0-\frac{\Delta\beta}{2},\gamma_0)}\,\Delta\gamma \approx \frac{\partial}{\partial\beta}\left(h_\gamma v_\gamma\right)\Big|_{(\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)} \Delta\beta\Delta\gamma$$

Legg merke til at $\Delta\beta\Delta\gamma$ er felles faktor for sirkulasjonsintegralet i teller og for arealet i nevner i den opprinnelige formelen for virvling. Videre blir alle tilnærminger vilkårlig nøyaktige i grensen at de to delta-størrelsene blir vilkårlig små.

Merk at for det ene valget av normalvektor $\boldsymbol{n}$ i utregningen ovenfor, så har vi kun bestemt én komponent av virvlingen. Det vil være nødvendig å gjøre det samme regnestykket to ganger til, med normalvektor $\boldsymbol{n}$ orientert i de to ortogonale retningene, for å bestemme alle komponentene av virvlingen.

Til slutt viser det seg at vi kan presentere sluttresultatet på en meget kompakt måte ved hjelp av en determinant

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \begin{vmatrix} h_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha & h_\beta \boldsymbol{i}_\beta & h_\gamma \boldsymbol{i}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial\beta} & \frac{\partial}{\partial\gamma} \\ h_\alpha v_\alpha & h_\beta v_\beta & h_\gamma v_\gamma \end{vmatrix}$$