Forelesning 29 den 7/5–2019 ved Karsten Trulsen

Sylinderkoordinater

Det er flere måter å navngi sylinderkoordinater. Gjevik & Fagerland (2017) benytter $\{r, \theta, z\}$, Matthews (1998) benytter $\{R, \phi, z\}$, Lindstrøm & Hveberg benytter $\{r, \theta, z\}$, og en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_coordinate_system benytter ISO standard $\{\rho, \varphi, z\}$. Den første kalles radiell koordinat, den andre kalles asimut (vinkelen langs horisonten), og den tredje kalles høyde.

Det er problematisk for oss å bruke ρ for radiell koordinat siden vi bruker ρ for massetetthet ellers i dette emnet. Det er også litt problematisk å bruke r for radiell koordinat fordi vi straks skal introdusere posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ som i så fall vil ha lengde forskjellig fra r. I disse forelesningsnotatene skal vi benytte $\{R, \theta, z\}$ selv om det i emnet for øvrig er vanlig å benytte $\{r, \theta, z\}$. **Uansett burde det være åpenbart at det er viktig å tegne en skisse for å klargjøre hva koordinatene heter.**

Vi beskriver først relasjonen mellom de kartesiske koordinatene og sylinderkoordinatene

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos\theta \\
y &= R\sin\theta \\
z &= z
\end{aligned}
$$

Dermed kan vi skrive posisjonsvektor

$$\boldsymbol{r} = R\cos\theta\,\boldsymbol{i} + R\sin\theta\,\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

og vi får skaleringsfaktorer og enhetsvektorer langs koordinataksene ved

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial R} = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j} \qquad h_R = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial R}\right| = 1 \qquad \boldsymbol{i}_R = \frac{1}{h_R}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial R} = \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -R\sin\theta\,\boldsymbol{i} + R\cos\theta\,\boldsymbol{j} \qquad h_\theta = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right| = R \qquad \boldsymbol{i}_\theta = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k} \qquad h_z = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right| = 1 \qquad \boldsymbol{i}_z = \frac{1}{h_z}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k}$$

Vi kan nå sjekke at sylinderkoordinatene er ortogonale

$$\boldsymbol{i}_R \cdot \boldsymbol{i}_\theta = \boldsymbol{i}_R \cdot \boldsymbol{i}_z = \boldsymbol{i}_\theta \cdot \boldsymbol{i}_z = 0$$

Dernest kan vi sjekke at sylinderkoordinatene utgjør et høyrehåndssystem (husk at siden vi allerede vet at de er ortogonale så er det tilstrekkelig å sjekke ett kryssprodukt)

$$\boldsymbol{i}_R \times \boldsymbol{i}_\theta = (\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j}) \times (-\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}_z$$

Sylinderkoordiatene er krumlinjet, så det er av interesse å vite hva de deriverte av enhetsvektorene er

	$\boldsymbol{i}_R$	$\boldsymbol{i}_\theta$	$\boldsymbol{i}_z$
$\frac{\partial}{\partial R}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\boldsymbol{i}_\theta$	$-\boldsymbol{i}_R$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

Vi kan nå uttrykke posisjonsvektor utelukkende ved hjelp av sylinderkoordinater og enhetsvektorer

$$\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i}_R + z\boldsymbol{i}_z$$

og differensialet blir

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_R\,\mathrm{d}R + R\boldsymbol{i}_\theta\,\mathrm{d}\theta + \boldsymbol{i}_z\,\mathrm{d}z$$

Ved hjelp av formlene vi har utledet nylig får vi:
Gradienten til en skalar f

$$\nabla f = \boldsymbol{i}_R\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{\boldsymbol{i}_\theta}{R}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \boldsymbol{i}_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

Divergensen av en vektor $\boldsymbol{v}$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(Rv_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Laplace-operatoren anvendt på en skalar f

$$\nabla^2 f = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Virvlinga til en vektor $\boldsymbol{v}$

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{R}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_R & R\boldsymbol{i}_\theta & \boldsymbol{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_R & Rv_\theta & v_z \end{vmatrix} = \frac{\boldsymbol{i}_R}{R}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - R\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) + \boldsymbol{i}_\theta\left(\frac{\partial v_R}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial R}\right) + \frac{\boldsymbol{i}_z}{R}\left(\frac{\partial}{\partial R}(Rv_\theta) - \frac{\partial v_R}{\partial \theta}\right)$$

Eksempel: Direkte utregning av divergens og virvling uten bruk av de "ferdige" formlene gitt ovenfor
Dersom vi skriver del-operatoren

$$\nabla = \boldsymbol{i}_R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\boldsymbol{i}_\theta}{R}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{i}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

og en generell vektor

$$\boldsymbol{v} = v_R\boldsymbol{i}_R + v_\theta\boldsymbol{i}_\theta + v_z\boldsymbol{i}_z$$

så får vi nøyaktig samme uttrykk for divergens og virvling ved å regne ut direkte $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ og $\nabla\times\boldsymbol{v}$, knepet er å la derivasjonsoperasjonene bli utført før vi gjør prikk- eller kryss-operasjonene, og husker på at enhetsvektorene også må deriveres i henhold til derivasjonstabellen for enhetsvektorene vist ovenfor.

Eksempel: Analyse av hastighetsfeltet til en karusell
La posisjonsvektor være $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i}_R + z\boldsymbol{i}_z$ og la vinkelhastigheten være $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{i}_z$.
Hastighetsfeltet er $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \omega R\boldsymbol{i}_\theta$.
Hastighetsfeltet er divergensfritt

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}(\omega R) = 0$$

Virvlinga er

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{i}_z}{R}\frac{\partial}{\partial R}(\omega R^2) = 2\omega \boldsymbol{i}_z = 2\boldsymbol{\omega}$$

Det er ingen lokalakselerasjon fordi vinkelhastigheten er antatt konstant. Partikkelakselerasjonen er derfor rent konvektiv

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \left(\omega\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\omega R\boldsymbol{i}_\theta) = -\omega^2 R\boldsymbol{i}_R$$

Vi kan også finne strømlinjene. Dette kan vi enten gjøre ved å løse likninga $\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ direkte, eller vi kan først finne en strømfunksjon. Ettersom vi her har med et 2D og divergensfritt felt vet vi at det finnes en strømfunksjon, så la oss finne den: Hastighetsfeltet er 2D i $\{R,\theta\}$-koordinatene. Vi konstruerer derfor et vektorpotensial $\boldsymbol{A} = -\psi(R,\theta)\boldsymbol{i}_z$ og representerer hastighetsfeltet med $\boldsymbol{v} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}_z\times\nabla\psi(R,\theta)$, eller

$$v_R = -\frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad \text{og} \qquad v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial R}$$

Vi finner strømfunksjonen $\psi = \frac{1}{2}\omega R^2 +$ en konstant.

Vi har altså strømlinjene gitt ved $\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i}_z\times\nabla\psi)\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \nabla\psi\,\mathrm{d}z - \boldsymbol{i}_z\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, og ettersom $\nabla\psi$ ikke har komponent i z-retning, og $\nabla\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\psi$, så er strømlinjene gitt ved z lik en konstant og ψ lik en konstant, dvs sirkler med radius R rundt z-aksen med fastholdt z-verdi.

Kulekoordinater

Det er flere måter å navngi kulekoordinater. Gjevik & Fagerland (2017) benytter $\{r,\theta,\varphi\}$, Matthews (1998) benytter $\{r,\theta,\phi\}$, Lindstrøm & Hveberg benytter $\{\rho,\phi,\theta\}$ og definerer $r = \rho\sin\phi$, og en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system benytter ISO standard $\{r,\theta,\varphi\}$ som er vanlig blant fysikere, og de påpeker at blant matematikere er det vanlig å bruke $\{r,\varphi,\theta\}$. Den første kalles radiell koordinat, den andre kalles polar vinkel, og den tredje kalles asimut (vinkelen langs horisonten).

I disse forelesningsnotatene skal vi benytte $\{r,\theta,\varphi\}$ selv om det kolliderer med notasjonen i matematikk-emnene. **Uansett burde det være åpenbart at det er viktig å tegne en skisse for å klargjøre hva koordinatene heter.**

Vi beskriver først relasjonen mellom de kartesiske koordinatene og sylinderkoordinatene

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

Dermed kan vi skrive posisjonsvektor

$$\boldsymbol{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + r\cos\theta\boldsymbol{k}$$

og vi får skaleringsfaktorer

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k} \qquad h_r = \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial r}\right| = 1$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -r\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + r\cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - r\sin\theta\,\boldsymbol{k} \qquad h_\theta = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right| = r$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{j} \qquad h_\varphi = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right| = r\sin\theta$$

og enhetsvektorer langs koordinatenes retninger

$$\boldsymbol{i}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{i}_\theta = -\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{i}_\varphi = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}$$

Vi kan nå sjekke at kulekoordinatene er ortogonale

$$\boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{i}_\theta = \boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{i}_\varphi = \boldsymbol{i}_\theta \cdot \boldsymbol{i}_\varphi = 0$$

Dernest kan vi sjekke at kulekoordinatene utgjør et høyrehåndssystem (husk at siden vi allerede vet at de er ortogonale så er det tilstrekkelig å sjekke ett kryssprodukt)

$$\boldsymbol{i}_r \times \boldsymbol{i}_\theta = (\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}) \times (-\cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{j} - \sin\theta\,\boldsymbol{k}) = -\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}_\varphi$$

Kulekoordiatene er krumlinjet, så det er av interesse å vite hva de deriverte av enhetsvektorene langs koordinataksene er

	$\boldsymbol{i}_r$	$\boldsymbol{i}_\theta$	$\boldsymbol{i}_\varphi$
$\frac{\partial}{\partial r}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\boldsymbol{i}_\theta$	$-\boldsymbol{i}_r$	$\boldsymbol{0}$
$\frac{\partial}{\partial \varphi}$	$\sin\theta\,\boldsymbol{i}_\varphi$	$\cos\theta\,\boldsymbol{i}_\varphi$	$(-\sin\theta\,\boldsymbol{i}_r - \cos\theta\,\boldsymbol{i}_\theta)$

Vi kan nå uttrykke posisjonsvektor utelukkende ved hjelp av kulekoordinater og enhtsvektorer langs koordinataksene

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{i}_r$$

og differensialet blir

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_r\,\mathrm{d}r + r\boldsymbol{i}_\theta\,\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\,\boldsymbol{i}_\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Ved hjelp av formlene vi har utledet nylig får vi:
Gradienten til en skalar f

$$\nabla f = \boldsymbol{i}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{i}_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\boldsymbol{i}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Divergensen av en vektor $\boldsymbol{v}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

Laplace-operatoren anvendt på en skalar f

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Virvlinga til en vektor $\boldsymbol{v}$

$$\nabla\times\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_r & r\boldsymbol{i}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{i}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ v_r & rv_\theta & r\sin\theta v_\varphi \end{vmatrix}$$