Forelesning 22/1–2019 ved Karsten Trulsen

Skalering og dimensjonsanalyse

Eksempel: Likning for fritt fall i tyngdefelt

Vi fant sist likninga for fritt fall i tyngdefeltet

$$\boldsymbol{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 \tag{1}$$

Kanskje vi lurer på om denne likninga er riktig eller gal. Ettersom likninga er såkalt dimensjonell finnes det en meget effektiv måte å sjekke om denne likninga er fysisk feil: Vi kan sjekke de fysiske dimensjonene. Hvert ledd må ha samme dimensjon. Dersom likninga hadde vært såkalt dimensjonsløs kunne vi ikke ha brukt denne måten for å sjekke likninga.

Merk: Vi vil kun være i stand til å sjekke om likninga er ufornuftig, vi vil ikke være i stand til å sjekke at den er riktig eller fornuftig!

Fysiske dimensjoner eller enheter

Se GF kap. 1.6.

I likninga ovenfor inngår det størrelser av fire forskjellige typer: tid, posisjon, hastighet og akselerasjon. Disse har fire forskjellige enheter eller fysiske dimensjoner. For at uttrykket skal være meningsfullt må hvert ledd ha samme enhet. La oss først se på de fire typene størrelser som inngår:

størrelse		enhet eller fysisk dimensjon	
navn	symbol	navn	symbol
tid	t	sekund	s
		time	h
lengde	l, x, y, z, r, s	meter	m
		kilometer	km
hastighet	$\boldsymbol{v}$		m/s
fart	v		m/s
akselerasjon	a, g		$\mathrm{m/s^2}$

La oss nå sjekke enhetene til hvert ledd i likning (1) ovenfor:
Venstre side: m
Høyre side: Første ledd $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\mathrm{s}^2 = \mathrm{m}$, andre ledd $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\mathrm{s} = \mathrm{m}$, tredje ledd m.

Vi ser at alle ledd har samme fysiske dimensjon m, slik de burde ha. Vi har dermed ikke vist at likninga er riktig eller fornuftig, men vi har ikke funnet noen grunn til å hevde at likninga er feil.

Skalering, skrive likninger på dimensjonsløs form

Noen ganger ønsker vi å frigjøre oss fra de fysiske enhetene. Det er for eksempel mange enheter for å måle tid: sekund, minutt, time, døgn, år, ... Tilsvarende mange enheter for å måle lengde: meter, tomme, fot, alen, nautisk mil, ... Ofte er det mer praktisk å identifisere en karakteristisk tid T og en karakteristisk lengde L som målestokk, og deretter bruke dimensjonsløse størrelser som er skalert med T og L.

Eksempel: Skalering av likning for fritt fall i tyngdefelt

La oss betrakte z-komponenten av likninga for fritt fall i tyngdefeltet

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0 \tag{2}$$

Vi introduserer stjerne-størrelser som er skalert slik som nettopp forklart:

$$z^* = \frac{z - z_0}{L} \qquad t^* = \frac{t}{T} \qquad v_{z0}^* = \frac{v_{z0}}{\left(\frac{L}{T}\right)} \qquad g^* = \frac{g}{\left(\frac{L}{T^2}\right)} \tag{3}$$

Da kommer likning (2) på formen

$$z^* = -\frac{1}{2}g^*(t^*)^2 + v_{z0}^* t^* \tag{4}$$

Denne likninga er dimensjonsløs. Det kan være en fordel fordi vi har frigjort oss fra problemstillingen om vi skal måle tiden i sekunder eller timer eller år, og tilsvarende problemstilling for alle de andre størrelsene.

Likning (4) har imidlertid noen utfordringer:

1. Vi kan ikke bruke fysiske enheter for å sjekke om likninga er ufornuftig.
2. Skaleringene i (3) er ikke de eneste mulige. T og L kan velges på mange måter.
3. Vi introduserte to nye dimensjonsløse parametere g^* og v_{z0}^*. Hva betyr de, og trenger vi dem egentlig?

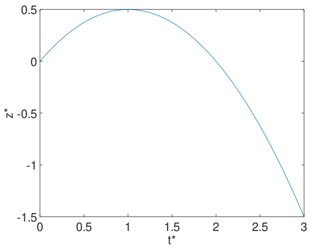
Vi kan nå ta skaleringen ett hakk videre, nemlig ved å insistere på at T og L skal velges slik at g^* og v_{z0}^* blir så enkle som mulig. La oss begrense oss til tilfellet $v_{z0} > 0$ og la oss insistere på at $g^* = v_{z0}^* = 1$. Dette oppnår vi ved å sette

$$T = \frac{v_{z0}}{g} \qquad \text{og} \qquad L = \frac{v_{z0}^2}{g} \tag{5}$$

og da kommer likninga på formen

$$z^* = -\frac{1}{2}(t^*)^2 + t^* = \frac{1}{2}t^*(2 - t^*) \tag{6}$$

Denne likninga er på en spesielt enkel form, fordi den ikke har noen dimensjonsløse parametere. Dette betyr at det er tilstrekkelig å tegne kun én graf som dekker alle tilfellene.



Likning (6) har imidlertid et par ulemper: Vi kan ikke sjekke om den er ufornuftig ved å se på fysiske enheter, og det kan være vanskelig å tolke betydningen av aksene t^* og z^*.

Oppgave: Andre frie fall

Utled kun én kurve (ingen dimensjonsløse parametere) i følgende tilfeller:

- Tilfellet $v_{z0} < 0$. Insister på at $t^* > 0$ når $t > 0$.
- Tilfellet $v_{z0} = 0$. Nå fungerer ikke (5), men anta $z_0 > 0$ og prøv for eksempel $L = z_0$ og $T = \sqrt{z_0/g}$.

Eksempel: Modell for friksjonskraft med to friksjonskoeffisienter
La oss anta at en friksjonskraft kan modelleres ved likninga

$$\boldsymbol{F} = -\nu \boldsymbol{v} - \mu |\boldsymbol{v}| \boldsymbol{v}$$

hvor ν og μ er to (positive) friksjonskoeffisienter. Her er ν en koeffisient for den delen av friksjonen som er proporsjonal med hastigheten, og μ er en koeffisient for den delen av friksjonen som er proporsjonal med kvadratet av hastigheten. Hva er de fysiske enhetene til friksjonskoeffisientene?

Vi vet at kraft måles i Newton, $\mathrm{N} = \dfrac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$, og hastighet måles i $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Dersom vi angir dimensjonen til koeffisientene som $[\nu]$ og $[\mu]$ så må vi ha

$$\mathrm{N} = [\nu]\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{N} = [\mu](\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2$$

og følgelig får vi

$$[\nu] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \qquad \text{og} \qquad [\mu] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}.$$

Litt om dimensjonsanalyse og Buckinghams Pi teorem
Det er to viktige spørsmål som passer å stille nå: Hva er det minste antallet dimensjonsløse parametere som er nødvendig for å beskrive et fenomen? Hvordan kan vi vite om et fenomen som skjer på stor skala, for eksempel en flodbølge i en fjord som oppstår på grunn av et ras, kan modelleres på riktig måte i et laboratorieeksperiment på liten skala? Disse spørsmålene besvares av dimensjonsanalyse og Buckinghams Pi teorem, se presentasjon:
Skalering, dimensjonsanalyse og Buckinghams Pi teorem

Derivasjon

Ordinær derivert, stigningstall

(repetisjon fra første semester)

For en skalar funksjon av én variabel, $f(x)$, definerer vi den deriverte, eller stigningstallet, som grensen

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Dersom vi kan forestille oss at Δx ennå ikke har nådd grensen, men at likninga likevel er en god tilnærming, så kan vi skrive et uttrykk for tilveksten til $f(x)$ når vi flytter oss fra x til $x + \Delta x$,

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

Dersom funksjonen er deriverbar, så vil tilnærmingen bli vilkårlig god i grensen at Δx blir vilkårlig liten, da bytter vi ut "Δ" med "d" for å angi "differensial"

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

hvor $\mathrm{d}f$ og $\mathrm{d}x$ er infinitesimale størrelser.

Partiell derivert

(repetisjon fra første semester)

For en skalar funksjon av to variable, $f(x,y)$, definerer vi de partiellderiverte med hensyn på x og y som grensene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Dersom vi kan forestille oss at Δx og Δy ennå ikke har nådd grensene, men at likningene likevel er gode tilnærminger, så kan vi skrive uttrykk for tilveksten til $f(x,y)$ når vi flytter oss fra (x,y) til $(x+\Delta x, y)$, eller fra (x,y) til $(x, y+\Delta y)$,

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x \qquad \text{og} \qquad f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Gradient, retningsderivert, del-operator

(LH 2.4, GF 2.3, M 3.2)

I det følgende betrakter vi en skalar funksjon $f(x,y)$ som avhenger av kun to variable x og y.

Tilvekst i vilkårlig retning

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Dersom vi grupperer leddene sammen parvis ser vi at vi kan gjøre tilnærmingen

$$\Delta f = \{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\} + \{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\} \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

I grensen $\Delta x \to 0$ og $\Delta y \to 0$ skriver vi

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\right) \cdot (\boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y)$$

som kalles et totalt differensial. Dette kan vi skrive på kortere form som

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

hvor

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y$$

er en infinitesimal forflytningsvektor, og hvor

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

kalles gradienten til den skalare funksjonen f.

Vi kan isolere ut kun ∇ som en vektor-operator. I tre dimensjoner blir den

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

denne kan vi kalle enten "nabla" eller "del".[1]

Retningsderivert = stigningstall langs en retning

La $\boldsymbol{a}$ være en enhets retningsvektor, $|\boldsymbol{a}| = 1$. La oss betrakte ei linje som går igjennom punktet $\boldsymbol{r}_0$ og la s være avstanden fra $\boldsymbol{r}_0$ til $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}s$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}s$$

Differensialet til den skalare funksjonen f kan da skrives

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \nabla f \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}s$$

Den retningsderiverte til f i retning $\boldsymbol{a}$ er

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \nabla f \cdot \boldsymbol{a}$$

Vi skal kreve at $|\boldsymbol{a}| = 1$ for at den retningsderiverte skal ha den intuitivt riktige verdien. Merk imidlertid at noen matematiske tekster tillater $|\boldsymbol{a}| \neq 1$ (se for eksempel LH 2.4 sin kommentar midt på side 119, legg for øvrig merke til at LH 2.4 har byttet om $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{r}$ i forhold til presentasjonen her).

[1] Det matematiske symbolet ∇ ble oppfunnet av William Rowan Hamilton (1805–1865). Ordet "nabla" kommer fra gresk eller arameisk språk og er navnet på en antikk harpe som ser ut som symbolet ∇.