Forelesning 30 den 10/5–2019 ved Karsten Trulsen

Noen eksempler på bruk av sylinderkoordinater

Eksempel: Formen til væskeoverflaten i en te-kopp hvor teen røres rundt som en karusell (et stivt legeme)

For å løse dette problemet antar vi hastighetsfeltet er

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \omega R \boldsymbol{i}_\theta$$

hvor vinkelhastigheten er $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$ orientert i vertikal retning, og hvor posisjonsvektor er $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{i}_R + z\boldsymbol{k}$. For å finne formen til væskeoverflaten må vi først finne trykket overalt væska. Vi har lært to mulige likninger som kan si oss noe om trykket: Bernoullis likning og Eulers likning.

Bernoullis likning sier at for et ideelt fluid (ingen friksjon) med konstant tetthet og stasjonært hastighetsfelt, så vil størrelsen

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{konstant langs en strømlinje}$$

Dersom hastighetsfeltet er virvelfritt så vil konstanten være den samme langs alle strømlinjer, men dersom det er virvling i hastighetsfeltet vil konstanten variere mellom strømlinjene. I vårt tilfelle har vi virvling, $\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, og følgelig vil Bernoullis likning kun fortelle oss at trykket er konstant langs en sirkel rundt z-aksen. Det er greit å vite, men ikke tilstrekkelig for å finne formen på væskeoverflaten.

Eulers likning egner seg bedre for å finne trykket overalt

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\boldsymbol{i}_z$$

som vi kan uttrykke for gradienten til trykket

$$\nabla p = \boldsymbol{i}_R \frac{\partial p}{\partial R} + \frac{\boldsymbol{i}_\theta}{R}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \boldsymbol{k}\frac{\partial p}{\partial z} = \rho\omega^2 R \boldsymbol{i}_R - \rho g \boldsymbol{k}$$

Denne løser vi komponentvis og finner

$$p = \frac{\rho\omega^2 R^2}{2} - \rho g z + \text{en konstant}$$

På den frie overflaten, som vi antar kun er funksjon av radiell avstand fra z-aksen, $z = \eta(R)$, vil væska ha trykk lik det konstante lufttrykket, $p = p_0$. Innsatt får vi

$$p_0 = \frac{\rho\omega^2 R^2}{2} - \rho g \eta(R) + \text{en konstant}$$

Formen på den frie overflaten blir

$$\eta(R) = \frac{\omega^2 R^2}{2g} + \text{en konstant}$$

som er en paraboloide.

Eksempel: Formen til den frie overflaten til roterende væske med hastighetsfelt proporsjonalt med en potens av radius

Vi vet at dersom vi rører rundt væske i en kopp slik at det roterer som en karusell (stivt legeme), $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, så vil overflaten ha krumning oppover, med laveste punkt i midten og høyest langs veggene til koppen. Vi har vist at overflaten har formen til en paraboloide. Dette gjorde vi ved å løse Eulers likning direkte. Vi kunne ikke finne denne løsningen ved å benytte Bernoullis likning fordi strømlinjene er sirkler rundt rotasjonsaksen, og hastighetsfeltet har virvling $\boldsymbol{c} = \nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, så Bernoullis likning kan kun brukes rundt hver sirkel og ikke på tvers av sirklene slik vi ønsker.

Vi skal nå vise hvordan vi kan løse problemet med å finne formen til den frie overflaten til vann for en mer generell roterende bevegelse med vilkårlig virvling. Helt konkret skal vi anta at hastighetsfeltet har formen

$$\boldsymbol{v} = v(R)\boldsymbol{i}_\theta = \alpha R^n \boldsymbol{i}_\theta \tag{1}$$

hvor n er en vilkårlig potens. Først ser vi at virvlinga er

$$\boldsymbol{c} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \alpha(n+1)r^{n-1}\boldsymbol{k} \tag{2}$$

hvor α er en konstant.

Vi går løs på likninga som står i GF kap. 10.5 like før selve Bernoullis likning framkommer, nemlig

$$\nabla \mathcal{B} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c} \tag{3}$$

hvor $\boldsymbol{c} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ er virvlinga til hastighetsfeltet, og hvor vi til ære for Daniel Bernoulli har introdusert notasjonen

$$\mathcal{B} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz. \tag{4}$$

Bruk av likning (3) er ekvivalent med å bruke Eulers likning i tilfellet av stasjonært hastighetsfelt og konstant tetthet.

Siden vi antar at hastighetsfeltet er en rendyrket sirkelbevegelse rundt rotasjonsaksen og at farten kun avhenger av avstanden til rotasjonsaksen har vi

$$\boldsymbol{v} = v(R)\boldsymbol{i}_\theta \tag{5}$$

og virvlinga er da

$$\boldsymbol{c} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(Rv)\,\boldsymbol{k}. \tag{6}$$

Videre finner vi at høyresiden i likning (3) blir

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c} = \frac{v}{R}\frac{\partial}{\partial R}(Rv)\,\boldsymbol{i}_R. \tag{7}$$

Dersom vi antar at $\mathcal{B}$ kun kan avhenge av radiell avstand R og vertikal koordinat z så har vi

$$\nabla \mathcal{B} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial R}\boldsymbol{i}_R + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{8}$$

Vi løser likning (3) komponentvis og får

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial R} = \frac{v}{R}\frac{\partial}{\partial R}(Rv) \tag{9}$$

og

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Den siste likninga viser at $\mathcal{B}$ ikke kan være en funksjon av z.

Dersom vi nå setter inn den antatte formen $v = \alpha R^n$ får vi (9) finner vi at

$$\mathcal{B} = \begin{cases} \frac{n+1}{2n}\alpha^2 R^{2n} + \beta & \text{for } n \neq 0 \\ \alpha^2 \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) & \text{for } n = 0 \end{cases} \tag{11}$$

hvor β og R_0 er to konstanter.

Vi vet at på den frie overflaten $z = \eta(R)$ må trykket i væsken være lik det konstante lufttrykket $p = p_0$, og følgelig har vi der når vi setter inn i likning (4)

$$\mathcal{B} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{\alpha^2 R^{2n}}{2} + g\eta. \tag{12}$$

Dersom de siste to likningene settes lik hverandre får vi formen til den frie overflaten

$$\eta(R) = \begin{cases} \frac{\alpha^2 R^{2n}}{2ng} + \gamma & \text{for } n \neq 0 \\ \frac{\alpha^2}{g} \ln\left(\frac{R}{R_1}\right) & \text{for } n = 0 \end{cases} \tag{13}$$

hvor γ og R_1 er to vilkårlige konstanter, de kan bestemmes for eksempel ved å kreve at det er et bestemt volum vann i koppen.

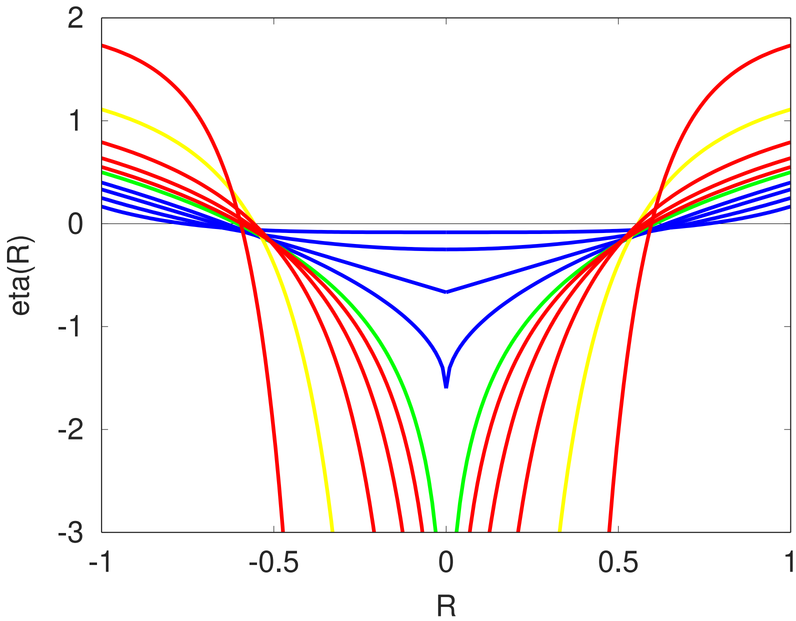
La oss først se på fortegnet til virvlinga:

- For $n < -1$ er virvlinga orientert motsatt den makroskopiske rotasjonsbevegelsen (retrograd).
- For $n = -1$ er hastigheten virvelfri.
- For $n > 1$ er virvlinga orientert samme vei som den makroskopiske rotasjonsbevegelsen (prograd).

I lys av dette, hvilken vei ville en bevisstløs mygg ha rotert rundt seg selv dersom den hadde blitt fraktet rundt av den makroskopiske bevegelsen?

Vi ser at løsningen har følgende egenskaper:

- For $n < 0$ har hastigheten en singularitet i origo ($|\boldsymbol{v}| \to \infty$), overflaten er singulær i origo ($\eta \to -\infty$) og krummer ned og blir asymptotisk horisontal langt vekk fra origo.
- For $n = 0$ er hastigheten endelig og diskontinuerlig i origo, overflaten er singulær i origo ($\eta \to -\infty$) og krummer ned og går mot uendelig langt vekk fra origo ($\eta \to \infty$).
- For $0 < n < \frac{1}{2}$ er hastigheten lik null i origo, overflaten har et endelig bunnpunkt i origo og har formen som en spiss som peker ned, overflaten krummer ned og går mot uendelig langt vekk fra origo ($\eta \to \infty$).



Figur 1: Formen til overflaten. Sort: vannet står i ro. Blå: $n = 0.25, 0.5, 1, 2$. Grønn: $n = 0$. Rød: $n = -0.1, -0.25, -0.5, -2$. Gul: $n = -1$. Normalisert slik at volumet av vann er det samme innenfor $R \leq 1$ og $z \geq -3$.

- For $n = \frac{1}{2}$ er hastigheten lik null i origo, overflaten har et endelig bunnpunkt i origo og har formen som et rett kremmerhus (uten krumning) med spiss som peker ned, overflaten går mot uendelig langt vekk fra origo ($\eta \to \infty$).
- For $n > \frac{1}{2}$ er hastigheten lik null i origo, overflaten har et endelig bunnpunkt i origo og har formen som en glatt skål som krummer opp og går mot uendelig langt vekk fra origo ($\eta \to \infty$).

Og så bemerker vi de to standard løsningene vi kjente til fra før:

- For $n = -1$ er hastigheten virvelfri og overflaten har formen $\eta(R) \propto R^{-2}$.
- For $n = 1$ har vi rotasjon som en karusell og overflaten har formen $\eta(R) \propto R^2$ som er en paraboloide.

Vi kan altså bruke formen på den frie overflaten som et mål for virvlinga i væsken!

Demonstrasjonsforsøk: Se på disse bildene og videoene og prøv å avsløre hva virvlinga er forskjellige steder i vannet ved å foreta en visuell kurvetilpasning for å bestemme potensen n i overflatehevningen $\eta(R) \propto R^{2n}$!

Kan du gjenkjenne at overflaten på rotasjonsaksen enten er singulær (i så fall er det ikke vann der i det hele tatt), eller en skarp spiss som peker ned, eller en glatt skål?

Kan du gjenkjenne at overflaten enten krummer ned eller opp?

Kan det stemme at vannet stort sett kan betraktes som virvelfritt bortsett fra nær rotasjonsaksen?

Merk: Det framkommer fra bildene og videoen at potensen n antakelig må betraktes som en funksjon av R, og det framkommer dessuten at overflaten antakelig må betraktes som en funksjon av både vinkelen θ og tiden t. Derfor er antakelsene i likning (1) ikke helt riktige, men likevel et godt utgangspunkt for å lage en enkel modell!

Takk til Ketil Ronold, Philip Andreas Aarstein, Anders Bråte, Jon Kristian Dahl og Arvid Siqveland for å bidra med bilder og videoer!

Eksempel på varmestrøm gjennom veggen på et vannrør

Anta et vannrør har indre radius R_0 og ytre radius R_1. Inni røret er det vann med temperatur T_0. Utenfor røret er det luft med temperatur T_1. Røret er laget av et fast stoff med varmeledningstall k. Finn temperaturfordelingen gjennom veggen til røret, og finn varmetapet per lengde av røret.

Vi ser først at dette er et stasjonært problem, og siden røret er laget av et fast stoff så er det ikke konveksjon i rørveggen. Varmelikninga reduserer seg da til Laplace likning

$$\nabla^2 T = 0.$$

Vi antar symmetri slik at temperaturen kun avhenger av radius R. I så fall har vi

$$\nabla^2 T = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial T}{\partial R}\right) = 0.$$

Løsningen kan skrives

$$T = A \ln \frac{R}{\beta}$$

Ved innsetting av randkrav finner vi

$$A = \frac{T_0 - T_1}{\ln \frac{R_0}{R_1}}$$

Varmeflukstettheten er gitt ved Fouriers lov

$$\boldsymbol{H} = -k\nabla T = -k\boldsymbol{i}_R \frac{A}{R}$$

Den integrerte vamefluksen over en rørlengde L er

$$Q = \int \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = 2\pi L k A$$

Vi finner at varmetapet per rørlengde er

$$\frac{Q}{L} = 2\pi k A = 2\pi k \frac{T_0 - T_1}{\ln \frac{R_0}{R_1}}$$

Dersom vi tar et rør av kobber med varmeledningstall 385 W/mK, med indre radius lik 5 mm og ytre radius lik 6 mm, og med temperatur på vannet inni røret 60° C og temperatur på lufta utenfor røret 0° C, får vi varmetap 796 kW/m.

Dersom vi tar et rør av isopor med varmeledningstall 0.04 W/mK, med indre radius lik 5 mm og ytre radius lik 15 mm, og med temperatur på vannet inni røret 60° C og temperatur på lufta utenfor røret 0° C, får vi varmetap 14 kW/m.