Forelesning 31 den 14/5–2019

Divergens- og virvelfrie felt: Laplace-likningen
(kap. 9 i Gjevik og Fagerland)

Svært ofte støter man på situasjoner der et vektorfelt $\boldsymbol{v}$ er både divergensfritt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1}$$

og virvelfritt

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Vi skal nå se at dette naturlig leder til at feltet er beskrevet av Laplace-likningen.

Beskrivelse med skalarpotensial: Dersom et felt er virvelfritt $\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ så vet vi at det eksisterer et skalarpotensial ϕ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$. Dersom feltet i tillegg er divergensfritt får vi $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0$, altså Laplace-likningen

$$\nabla^2\phi = 0. \tag{3}$$

I kartesiske koordinater $\{x, y, z\}$ har vi

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

i sylinderkoordinater $\{r, \theta, z\}$ har vi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \tag{5}$$

og i kulekoordinater $\{r, \theta, \varphi\}$ har vi

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{6}$$

Beskrivelse med vektorpotensial: Dersom et felt er divergensfritt $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ så eksisterer det et vektorpotensial $\boldsymbol{A}$ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.[1] Dersom feltet i tillegg er virvelfritt får vi $\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A} = 0$.

Vektorpotensialet $\boldsymbol{A}$ har tre komponenter, like mange som feltet $\boldsymbol{v}$. Kravet om at feltet er divergensfritt, $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, pålegger imidlertid en betingelse på komponentene til $\boldsymbol{v}$. Derfor har vi frihet til å pålegge en vilkårlig tilleggsbetingelse på komponentene til $\boldsymbol{A}$, dette kalles for å velge "gauge". Et naturlig valg er å pålegge at vektorpotensialet er divergensfritt, $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, dette kalles Coulomb "gauge". I så fall må vektorpotensialet oppfylle Laplace-likningen på vektorform

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}. \tag{7}$$

NB! Her virker altså Laplace-operatoren på vektorfeltet $\boldsymbol{A}$, da gjelder ikke likningene (5) og (6) på komponentene til $\boldsymbol{A}$!

[1] Eksistensen av vektorpotensialet regnes ikke som pensum i MEK1100, i GF kap. 4.5 begrenser man seg til å si at dersom $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ så er $\boldsymbol{v}$ divergensfritt.

Beskrivelse med strømfunksjon: Dersom et felt er divergensfritt $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ og 2D så eksisterer det en strømfunksjon ψ slik at $\boldsymbol{v}$ kan uttrykkes ved strømfunksjonen. Dersom vi antar feltet er 2D i den forstand at det lever i xy-planet, $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ og $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = \boldsymbol{0}$, så kan feltet beskrives ved vektorpotensialet $\boldsymbol{A} = -\psi(x,y)\boldsymbol{k}$ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \psi}{\partial x}$, se GF kap. 4.6.

Legg merke til at representasjonen av feltet $\boldsymbol{v}$ i plane polarkoordinater kommer fra beregningen av virvlingen til vektorpotensialet i sylinderkoordinater

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times (-\psi \boldsymbol{k}) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_r & r\boldsymbol{i}_\theta & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\psi \end{vmatrix} = -\frac{\boldsymbol{i}_r}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \boldsymbol{i}_\theta \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Dette vektorpotensialet er divergensfritt (det tilfredsstiller Coulomb "gauge") og følgelig ser vi at strømfunksjonen må oppfylle den to-dimensjonale Laplace-likningen, $\nabla^2 \psi = 0$. Dette ser vi fordi enhetsvektoren i z-retning er konstant.

Vi har da i kartesiske koordinater $\{x, y\}$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \tag{8}$$

og i plane polarkoordinater $\{r, \theta\}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \tag{9}$$

2D divergens- og virvelfrie felt i xy-planet, Cauchy–Riemanns likninger

I det følgende skal vi stor sett begrense oss til felt av typen $\boldsymbol{v} = v_x(x,y)\boldsymbol{i} + v_y(x,y)\boldsymbol{j}$ eller $\boldsymbol{v} = v_r(r,\theta)\boldsymbol{i}_r + v_\theta(r,\theta)\boldsymbol{i}_\theta$. Ettersom vi kan velge om vi ønsker å representere feltet med et potensial eller en strømfunksjon, så må det være en relasjon mellom disse, nemlig

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

Disse likningene kalles Cauchy–Riemanns likninger med henholdsvis kartesiske eller polare koordinater.

Strømlinjer og ekvipotensialflater står normalt på hverandre

Dersom vi begrenser oss til det to-dimensjonale tilfellet, slik at både potensialet og strømfunksjonen eksisterer, så må vi vise at $\nabla \phi \cdot \nabla \psi = 0$, dette får vi til ved hjelp av Caucy–Riemanns likninger,

$$\nabla \phi \cdot \nabla \psi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Øvelse: Sjekk at du får samme resultat ved å bruke polarkoordinater.

Dersom vi ser på det tre-dimensjonale tilfellet så har vi ikke en strømfunksjon og vi må istedenfor bruke den opprinnelige definisjonen på strømlinjer $\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r} = 0$, så $\boldsymbol{v}$ er parallell med strømlinjene. Vi har i tillegg at $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$, så $\boldsymbol{v}$ står normalt på ekviskalarflatene. Følgelig står strømlinjene normalt på ekviskalarflatene.

Merk at i et stagnasjonspunkt, der hvor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, trenger ikke strømlinjene stå normalt på ekvipotensialflatene, for i så fall er disse betingelsene tilfredsstilt uansett.

Et enkelt eksempel

La oss studere feltet $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$.

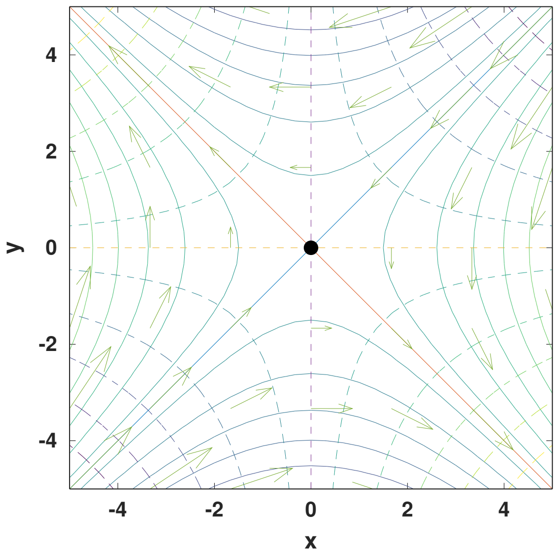
Vi ser umiddelbart at feltet er divergens- og virvelfritt, så det eksisterer både en strømfunksjon og et skalarpotensial

$$\psi = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

og

$$\phi = -xy$$

I figuren ser vi stagnasjonspunktet som et kulepunkt i origo, vi ser strømlinjer som heltrukne kurver, og vi ser ekvipotensialkurver som stiplede kurver. Vi ser også piler som viser retning og relativ styrke til feltet.



Superposisjonsprinsippet

Likningene for divergensfrihet (1) og virvelfrihet (2) samt alle de forskjellige variantene av Laplace-likningen (3)–(9) er lineære. Følgelig gjelder superposisjonsprinsippet: La for eksempel ϕ_1 og ϕ_2 oppfylle Laplace-likningen og la a og b være vilkårlige konstanter, da oppfyller $\phi = a\phi_1 + b\phi_2$ også Laplace-likningen, $\nabla^2\phi = \nabla^2(a\phi_1 + b\phi_2) = a\nabla^2\phi_1 + b\nabla^2\phi_2 = 0$.

Vi kan benytte superposisjonsprinsippet for å konstruere vilkårlig kompliserte løsninger av Laplace-likningen ved å sette sammen velkjente og "enkle" løsninger.

Laplace-likningen er i utgangspunktet vanskelig å løse fordi den er en partiell differensiallikning. Vi kan imidlertid redusere den til en ordinær differensiallikning dersom vi antar at potensialet eller strømfunksjonen kun avhenger av én koordinat om gangen. Vi lar dette være vår definisjon av en "enkel" løsning.

Eksempel på "enkel" løsning: rettlinjet strøm

Anta $\phi = \phi(x)$. Laplace-likningen reduserer seg til $\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$ som har løsning $\phi = Ax + B$. Cauchy–Riemanns likninger gir

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = A = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}$$

som gir $\psi = -Ay + C$. Vektorfeltet er $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{i}$.

Øvelse: Gjør dette også med antakelsene $\phi = \phi(y)$, $\psi = \psi(x)$ og $\psi = \psi(y)$.

Eksempel på "enkel" løsning: Kilde/sluk

Anta $\phi = \phi(r)$. Laplace-likningen reduserer seg til $\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$ som har løsning $\phi = A\ln r + B$. Cauchy–Riemanns likninger gir

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{A}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0 = \frac{\partial\psi}{\partial r} \end{aligned}$$

som gir $\psi = -A\theta + C$. Vektorfeltet er $\boldsymbol{v} = \frac{A}{r}\boldsymbol{i}_r$. Vi kan si at dette er feltet til en "kilde" dersom $A > 0$ eller til et "sluk" dersom $A < 0$. Det er altså origo som er selve kilden eller sluket. For å angi "styrken" til kilden eller sluket kan vi enten oppgi A eller vi kan regne ut den integrerte fluksen ut gjennom en sirkel rundt origo.

Øvelse: Vis at den integrerte fluksen ut gjennom en sirkel rundt origo er lik $2\pi A$ uavhengig av radius til sirkelen!

Eksempel på "enkel" løsning: Punktvirvel

Anta $\phi = \phi(\theta)$. Laplace-likningen reduserer seg til $\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0$ som har løsning $\phi = A\theta + B$. Cauchy–Riemanns likninger gir

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{A}{r} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \end{aligned}$$

som gir $\psi = A\ln r + C$. Vektorfeltet er $\boldsymbol{v} = \frac{A}{r}\boldsymbol{i}_\theta$. Vi kan si at dette er feltet til en "punktvirvel" i origo. For å angi "styrken" til punktvirvelen kan vi enten oppgi A eller vi kan regne ut sirkulasjonen rundt en sirkel med sentrum i origo.

Merk: Vektorfeltet til punktvirvelen er virvelfritt, $\nabla\times\boldsymbol{v} = 0$, overalt bortsett fra i origo hvor feltet er singulært.

Øvelse: Vis at sirkulasjonen rundt en slik sirkel er lik $2\pi A$ uavhengig av radius til sirkelen!

Øvelse: Finn de "enkle" løsningene som framkommer ved å anta $\psi = \psi(r)$ og $\psi = \psi(\theta)$.