Forelesning 25/1–2019

Skalering og dimensjonsanalyse

Eksempel på skalering: Regne GF oppgave 1.12

Se GF kap. 1.6.

a) Vi har formelen for partikkelens høyde h som funksjon av tiden t

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

som vi ser er en parabel som åpner seg nedover (mot negative h). Høyeste punkt (maksimum for h) finner vi ved å sette

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt = 0$$

som gir

$$t = t_m = \frac{v_0}{g} \qquad \text{og} \qquad h = h_m = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Vi vet at dette må være et maksimum fordi $\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = -g < 0$.

b) Nå skalerer vi med t_m og h_m, og introduserer t^* og h^* som dimensjonsløse og skalerte variable,

$$h^* = \frac{h}{h_m} \qquad \text{og} \qquad t^* = \frac{t}{t_m}$$

som gir den skalerte og dimensjonsløse likninga

$$h^* = 2t^* - (t^*)^2.$$

c) Vi får kun én kurve, en parabel som går igjennom origo, punktet (1,1) og punktet (2,0). Det er altså ingen frie parametere. Utfordringen med å tolke resultatet er at aksene har blitt litt mer komplisert, nemlig

$$t^* = \frac{gt}{v_0} \qquad \text{og} \qquad h^* = \frac{2gh}{v_0^2}.$$

Gradient og retningsderivert

Egenskaper til gradienten til en skalar ∇f

Vi fant sist at en funksjon $f(\boldsymbol{r})$ har retningsderivert i retningen til $\boldsymbol{a}$ gitt ved

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \nabla f \cdot \boldsymbol{a} = |\nabla f||\boldsymbol{a}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

Her tenker vi oss at vi står i et punkt $\boldsymbol{r}_0$ og beveger oss i retning $\boldsymbol{a}$ i henhold til en parameterisering $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{a}$ hvor parameteren s angir avstanden fra punktet $\boldsymbol{r}_0$ i $\boldsymbol{a}$

sin retning. Vi skal insistere på at $|\boldsymbol{a}| = 1$ slik at s faktisk måler avstand. Vinkelen mellom ∇f og $\boldsymbol{a}$ er θ.

Vi ser at den største verdien for den retningsderiverte oppnås for $\theta = 0$, det vil si når $\boldsymbol{a}$ og ∇f peker i samme retning. Vi kan sette $\boldsymbol{a} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ og vi ser at den største verdien til den retningsderiverte er $|\nabla f|$.

Vi ser også at dersom $\boldsymbol{a} \perp \nabla f$ så er den retningsderiverte lik null.

Eksempel på skalering og retningsderivert: Terreng

Et terreng er gitt ved

$$z = h(x, y) = x^2 - y^2$$

hvor x peker mot øst, y peker mot nord, z-aksen peker oppover, og $h(x, y)$ er høyden til terrenget. Undersøk om likninga er gitt på dimensjonell eller dimensjonsløs form. Finn stigningstallet i punktet (1,0) i retning nordøst.

For å undersøke om likninga er dimensjonell eller ikke så innser vi at x, y og z er lengder. Dersom likninga var dimensjonell så vil høyresiden ha dimensjon av areal mens venstresiden vil ha dimensjon av lengde. Dette er en selvimotsigelse, da en lengde ikke kan være lik et areal. Følgelig innser vi at likninga er gitt på dimensjonsløs form.

Retningen er $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{\sqrt{2}}$. Legg merke til at $|\boldsymbol{a}| = 1$. Vi har $\nabla h = 2x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}$, $\nabla h \cdot \boldsymbol{a} = \sqrt{2}(x - y)$, og følgelig får vi stigningstallet $\nabla h \cdot \boldsymbol{a}|_{x=1,y=0} = \sqrt{2}$.

Eksempel på skalering og retningsderivert: Temperatur

Temperaturen i et rom er gitt ved

$$T(x, y, z) = \alpha(x + 2y - 3z).$$

Dersom temperaturen måles i Kelvin (K) og lengde måles i meter (m), hva er enheten til α? Hvilken vei øker temperaturen raskest, og hvor fort?

Først ser vi at enheten til α må være $[\alpha] = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$.

Vi har $\nabla T = \alpha(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$, og vi vet at temperaturen øker fortest i retningen til gradienten, og vi vet at den retningsderiverte i den retningen er lik $|\nabla T| = \alpha\sqrt{14}$.

Dersom vi vil kan vi også regne ut den tilhørende enhetsretningsvektoren for raskest økende temperatur $\boldsymbol{a} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}}$.

Taylor-utvikling og visualisering på datamaskin

Taylor-utvikling i én variabel

Se GF kap. 2.2, M kap 3.1.

Taylor-utviklingen av en funksjon $f(x)$ rundt et punkt x_0 er

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

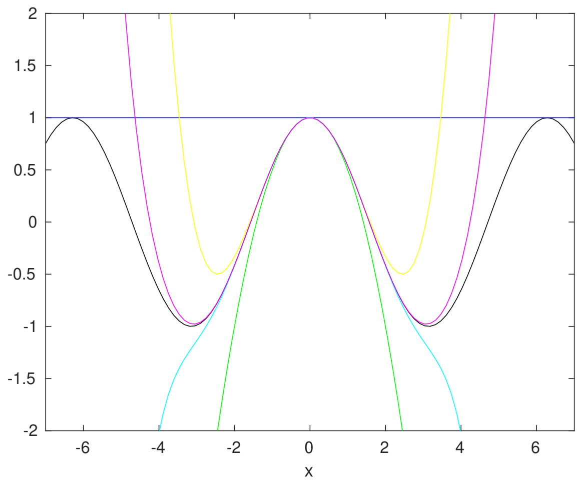
Ta som eksempel $f(x) = \cos x$ og $x_0 = 0$, da får vi

$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

Følgende program i Matlab/Octave:

```
% Taylor-utvikling av cos(x) rundt origo
xmax=7;
n=100;
x=linspace(-xmax,xmax,n);
hold off
% funksjonen i svart
plot(x,cos(x),'k');
axis([-xmax xmax -2 2])
xlabel('x')
hold on
% potens null i blå
plot ([-xmax xmax], [1 1], 'b');
% potens to i grønn
plot (x, 1 - 1/2*x.^2, 'g');
```

produserer den svarte, blå og grønne kurven i følgende plott:



Vis at dersom Taylor-utviklingen fortsettes vil resultatet til fjerde, sjette og åttende potens være gitt ved kurvene tegnet i gul, cyan og magenta!

Taylor-utvikling flere variable
Se GF kap. 2.2, M kap 3.1.

Taylor-utviklingen av en funksjon $f(x, y)$ rundt et punkt (x_0, y_0) er

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{1}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \tag{2}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \cdots \tag{3}$$

Fra LH 2.5.2 har vi at dersom $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ eksisterer og er kontinuerlige, så er de like. Dette skal vi anta er tilfellet for oss, så vi kan skrive

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \approx & f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) && (4)\\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) && (5)\\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \cdots && (6)
\end{aligned}
$$

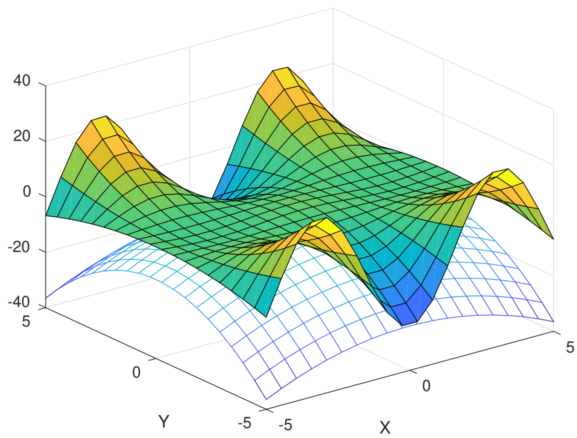
Ta som eksempel $f(x,y) = (1-y^2)\cos x$ og $x_0 = y_0 = 0$, da får vi

$$f(x,y) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 - y^2 + \cdots$$

Følgende program i Matlab/Octave:

```
% Taylor-utvikling av (1-y^2)*cos(x) rundt origo
% over kvadratisk område i xy-planet
maks=5;
n=20;
[x,y]=meshgrid(linspace(-maks,maks,n));
hold off
% funksjonen i solid flate
surf(x,y,cos(x).*(1-y.^2));
hold on
% Taylor-utvikling til potens 2 i nett
mesh(x,y,1-0.5*x.^2 - y.^2);
xlabel('X')
ylabel('Y')
% bruk musa på figuren for å dreie den rundt slik at du får et godt
% inntrykk av hvor godt Taylor-utviklingen tilnærmer funksjonen i x- og
% y-retning
```

produserer de to flatene som er vist i følgende plott:



Se GF kapittel 3 for Matlab, eller oversettelsen til Python, for ytterligere diskusjon om hvordan man lager slike figurer på datamaskin.