Forelesning 29/1–2019

Å finne skalarfunksjonen når gradienten er kjent.

Se GF kap. 2.3.4.

Eksempel: Se på $\nabla\beta = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Vi vet at

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

og følgelig ser vi at vi må løse et system av tre likninger som vi skriver på komponentform.

Alternativ I:

Likningene er ganske enkle å løse

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = y \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = xy + f_1(y,z)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = x \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = xy + f_2(x,z)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = z + f_3(x,y)$$

hvor de tre funksjonene f_1, f_2 og f_3 er tilfeldige integrasjonskonstanter for hver integrasjon (konstanter med hensyn på variabelen det ble integrert med hensyn på). For at svaret skal bli entydig må vi velge disse tre funksjonene slik at de tre løsningen ovenfor kommer i overensstemmelse. Dette problemet kan vi løse ved å "stirre" på likningene ovenfor, og være tilstrekkelig kreativ for å "komme på" en passende løsning

$$f_1(y,z) = z + c, \qquad f_2(x,z) = z + c, \qquad f_3(x,y) = xy + c$$

hvor c er en tilfeldig konstant. Svaret blir følgelig

$$\beta(x,y,z) = xy + z + c$$

hvor c er en tilfeldig konstant.

Alternativ II:

Dersom vi ikke liker å "stirre" kan vi gå forsiktigere til verks. Først ser vi på komponentlikninga i x-retning

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = y \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = xy + f(y,z)$$

hvor f er en integrasjonskonstant med hensyn på x, og deretter setter vi dette inn i komponentlikninga i y-retning

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = x \qquad \Longrightarrow \qquad x + \frac{\partial f}{\partial y} = x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f = g(z)$$

hvor g er en integrasjonskonstant med hensyn på y, og deretter setter vi dette inn i komponentlikninga i z-retning

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad g = z + c$$

hvor c er en integrasjonskonstant. Så substituerer vi tilbake og får samme svar

$$\beta(x, y, z) = xy + z + c.$$

Denne gangen kom vi i mål uten verken å "stirre" eller være kreativ, men skrivearbeidet var mer omstendelig.

Eksempel: Noen ganger eksisterer det ikke en skalarfunksjon.

Se på vektorfeltet $y\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j}$ og forsøk å finne en skalarfunksjon ψ slik at gradienten til ψ gir nevnte vektorfelt

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\boldsymbol{j} = y\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j}$$

På komponentform får vi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y \qquad \Longrightarrow \qquad \psi = xy + f(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = xy \qquad \Longrightarrow \qquad \psi = \frac{1}{2}xy^2 + g(x)$$

hvor f og g er integrasjonskonstanter. Disse to uttrykkene kan ikke komme overens! La oss sjekke de blandede dobbeltderiverte

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 1$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = y$$

Disse er forskjellige. Husk LH setning 2.5.2:

Dersom $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$ og $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$ eksisterer og er kontinuerlige så er de like.

I dette tilfellet er de ikke like, og alle uttrykkene er kontinuerlige, så vi må konkludere at de ikke eksisterer! Det som ikke eksisterer er skalarfunksjonen ψ. Vi har følgelig vist at noen vektorfelt ikke er gradienten til en skalarfunksjon.

Ekviskalarflater

Se GF kap. 2.3 og M kap. 3.2.

Vi skal nå se på uttrykk av typen $\beta(x, y, z) =$ konstant. Dette uttrykket er tvetydig, for det kan enten bety at $\beta(x, y, z)$ er definert til å være en konstant eller det kan bety at $\beta(x, y, z)$ er en funksjon av x og y og z som tvinges til å holde en konstant verdi. I det siste tilfellet vil dette gi en relasjon mellom verdiene til x og y og z som beskriver en flate, denne skal vi kalle en ekviskalarflate fordi skalarfunksjonen β holdes på konstant verdi.

Det er viktig at vi sier tydelig hva vi mener med uttrykk av typen $\beta(x, y, z) =$ konstant.

Eksempel: For skalarfunksjonen $\beta(x, y, z) = x$, studer ekviskalarflaten $\beta(x, y, z) = 1$. Dette er $x = 1$ som er et plan parallelt med yz-planet.

Eksempel: For skalarfunksjonen $\beta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, studer ekviskalarflaten $\beta(x, y, z) = R^2$. Dette er et kuleskall med radius R sentrert rundt origo.

Eksempel: Et terreng er gitt ved høydefunksjonen $z = h(x, y)$ hvor x og y er horisontale koordinater, z-aksen peker oppover, og funksjonen $h(x, y)$ angir høyden til terrenget. Vi kan definere en skalarfunksjon ved å sette $\beta(x, y, z) = z - h(x, y)$ og følgelig kan vi betrakte terrenget som ekviskalarflaten $\beta(x, y, z) = 0$.

Flatenormalvektor

Se GF kap. 2.3 og M kap. 3.2.

Vi skal vise at $\nabla\beta$ står normalt på ekviskalarflaten $\beta =$ konstant.

Alternativ I: Bruk formelen for totalt differensial

Vi står i et punkt $\boldsymbol{r}_0$ på en ekviskalarflate $\beta(\boldsymbol{r}) =$ konstant, og vi regner ut gradienten $\nabla\beta$. La oss betrakte en infinitesimal forflytning $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ fra punktet $\boldsymbol{r}_0$ til et nytt punkt $\boldsymbol{r}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ på samme ekviskalarflate $\beta(\boldsymbol{r}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{r}) =$ konstant. Husk formelen for totalt differensial $\mathrm{d}\beta = \nabla\beta \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Dersom $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er en forflytning til et nytt punkt på samme ekviskalarflate, så kan ikke β endre verdi, det vil si $\mathrm{d}\beta = 0$, og følgelig har vi $\nabla\beta \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$. Da må enten $\nabla\beta \perp \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ eller $\nabla\beta = 0$.

Alternativ II: Bruk formelen for retningsderivert

Se på den retningsderiverte til $\beta(\boldsymbol{r})$ i en retning $\boldsymbol{a}$, $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = \nabla\beta \cdot \boldsymbol{a}$, hvor s er en parameter som måler avstanden vi forflytter oss langs retningen til $\boldsymbol{a}$. Dersom vi insisterer på at retningen til $\boldsymbol{a}$ er i tangentplanet til ekviskalarflaten så skal ikke β endre sin verdi, det vil si $\nabla\beta \cdot \boldsymbol{a} = 0$. Da må enten $\nabla\beta \perp \boldsymbol{a}$ eller $\nabla\beta = 0$.

Eksempel: Finn enhetsnormalvektor til flaten $x = 0$.

Vi ser umiddelbart at flaten er yz-planet. Flaten kan vi skrive som ekviskalarflaten til $\beta(x, y, z) = x$, nemlig $\beta = 0$. Derfor regner vi ut $\nabla\beta = \nabla x = \boldsymbol{i}$. Denne har allerede enhetslengde, men for ordens skyld kan vi skrive enhetsnormalvektor

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla x}{|\nabla x|} = \pm\boldsymbol{i}$$

Legg merke til at dette eksemplet har to løsninger, normalvektor peker enten i positiv eller negativ x-retning.

Eksempel: Finn enhetsnormalvektor til kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Flaten kan vi skrive som ekviskalarflaten til $\beta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, nemlig $\beta = R^2$. Derfor regner vi ut $\nabla\beta = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$. For å finne en normalvektor med enhetslengde skriver vi

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|} = \pm\frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{R}$$

Igjen har vi to løsninger, normalvektor peker enten inn mot sentrum eller ut fra sentrum.

Visualisering av vektorfelt med Matlab/Octave/Python

Se GF fig. 2.5 og kap. 3.5.

Ofte ønsker vi å representere et vektorfelt grafisk ved et pileplott. For hvert punkt tegner vi da en pil som har samme retning som vektorfeltet i punktet, og vi lar pilene få riktig innbyrdes lengde sammenliknet med andre piler.

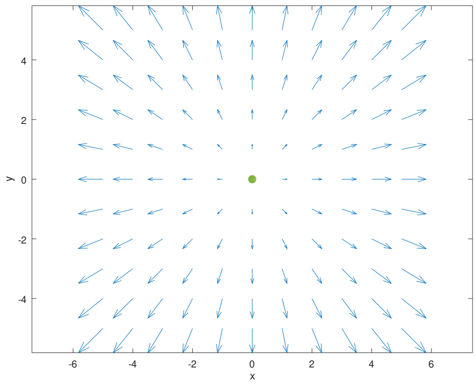
Vi kan bruke `quiver` for å representere et vektorfelt som pileplott i planet, og `quiver3` for å representere et vektorfelt som pileplott i rommet. Det engelske ordet "quiver" betyr kogger på norsk, altså en kurv hvor man oppbevarer piler.

Eksempel: Vektorfeltet $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$

Følgende program i Matlab/Octave visualiserer vektorfeltet ved en samlig piler:

```
[x,y] = meshgrid(-5:1:5);
vx = x;
vy = y;
% Kall opp quiver med skaleringsfaktor for å justere lengden på pilene
% quiver(x,y,vx,vy,1.5)
% eller kall opp quiver uten skaleringsfaktor:
quiver(x,y,vx,vy)
% Dersom vi liker å indikere stagnasjonspunkter med et kulepunkt, noe som
% ikke blir gjort av quiver, så kan vi først finne stagnasjonspunktet (origo
% i dette tilfellet), og plotte det inn separat:
hold on
plot ([0], [0], '.', 'markersize', 25)
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal
hold off
```

og produserer følgende plott:



Vi har tegnet inn et kulepunkt for å angi stagnasjonspunktet i origo, det vil si der hvor $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Kommandoen `axis equal` er nødvendig for at innbyrdes vinkel mellom pilene skal se riktig ut.

Eksempel: Prøv nå selv å lage tilsvarende plott for $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v} = -x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, osv.

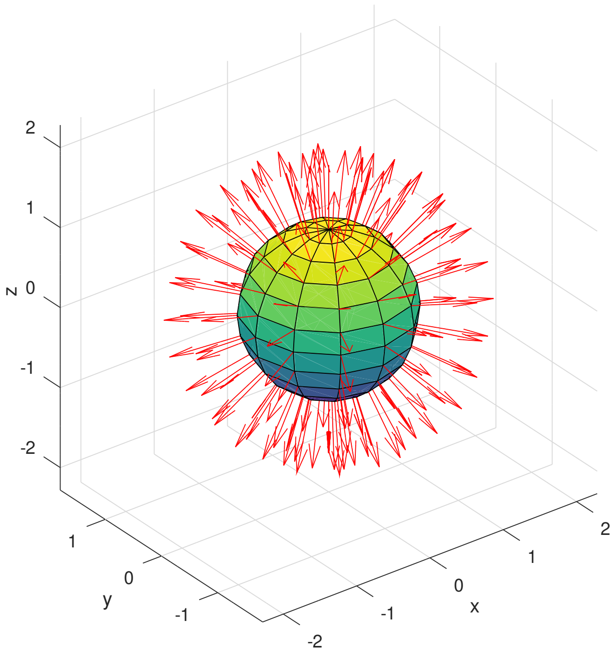
NB! Prøv å se for deg hvordan disse vektorfeltene ser ut, og plott dem opp for hånd, før du lar datamaskinen gjøre det for deg!

Eksempel: Følgende program i Matlab/Octave visualiserer et kuleskall og normalvektorer til kuleskallet:

```
% Bruk kulekoordinater for å parametrisere ei kuleflate med radius 1
R = 1 ;
theta = linspace(0,pi,13) ;
phi = linspace(0,2*pi,13);
% Lag rutenett
[THETA,PHI] = meshgrid(theta,phi) ;
% Bruk parametriseringen for å regne ut kartesiske koordinater
X = R.*sin(THETA).*cos(PHI) ;
Y = R.*sin(THETA).*sin(PHI) ;
Z = R.*cos(THETA) ;
% Plott kuleoverflata
surf(X,Y,Z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
% De kartesiske komponentene til gradienten til skalarfunksjonen
% brukes for å angi retningen til normalvektorene
dX = X ;
dY = Y ;
dZ = Z ;
hold on
% Kommandoen quiver3 tegner piler i 3D rom.  Pilene starter i punktene gitt
```

```
% ved koordinatene X,Y,Z og peker i retningene gitt ved dX,dY,dZ.  Vi har
% angitt en skalering 3 for at pilene skal ta seg bra ut visuelt.  Dessuten
% ber vi om at pilene skal være røde.
quiver3 (X,Y,Z,dX,dY,dZ,3,'r')
axis equal
hold off
```

og produserer følgende plott:



Kommandoen `axis equal` er nødvendig for at kula skal se kulerund ut, uten denne kommandoen vil kula se sammentrykt ut.