Forelesning 1/2–2019

Strømlinjer/Feltlinjer

Se GF kap. 2.4.

Strømlinjene eller feltlinjene til et vektorfelt $\boldsymbol{v}$ er kurver som har vektorfeltet som tangent overalt.

Husk at for to vektorer $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ har vi at $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ hvor θ er vinkelen mellom $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$. Dersom vektorene $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{B}$ er parallelle, $\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{B}$, så er $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$. Motsatt vei har vi at dersom $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ så er enten $\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{B}$ eller $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ eller $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.

La oss tenke oss at strømlinjene har infinitesimale tangentvektorer $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Vvi krever at $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er parallell med $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}\|\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, som vi kan skrive som

$$\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}.$$

Dette er likninga som vi må løse for å finne strømlinjene.

Eksempel: La $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$. Finn strømlinjene!

Husk først at med posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ så blir differensialet $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -y & x & 0 \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{vmatrix} = x\,\mathrm{d}z\,\boldsymbol{i} + y\,\mathrm{d}z\,\boldsymbol{j} + (-y\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}x)\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

Denne likninga løser vi komponentvis

$$x\,\mathrm{d}z = 0 \qquad y\,\mathrm{d}z = 0 \qquad -y\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}x = 0$$

Første likning har løsning $x = 0$ eller $z =$ konstant.

Andre likning har løsning $y = 0$ eller $z =$ konstant.

Tredje likning er ei separabel ordinær differensiallikning, $x\,\mathrm{d}x = -y\,\mathrm{d}y$, og løses ved å ta integralet på begge sider, $\int x\,\mathrm{d}x = -\int y\,\mathrm{d}y$, som gir $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}y^2 +$konstant.

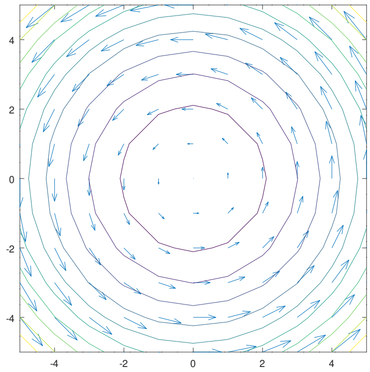
Den fulle løsninga blir da $x^2 + y^2 =$ konstant og $z =$ konstant, altså sirkler med sentrum i $x = y = 0$ og som ligger i plan parallelle med xy-planet.

Å plotte ekviskalarkurver $f(x, y) =$ konstant gjøres enkelt med `contour`-kommandoen i Matlab/Octave eller Python.

Følgende program i Matlab/Octave visualiserer løsningen sammen med et pilplott for vektorfeltet

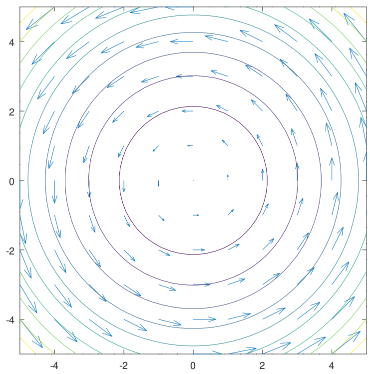
```
[x,y] = meshgrid(-5:1:5);
vx = -y;
vy = x;
quiver(x,y,vx,vy)
axis equal
f = x.^2 + y.^2;
hold on
contour (x, y, f)
hold off
```

og produserer følgende plott:



Legg merke til at det er omtrent riktig antall piler, men sirklene er ikke spesielt pene. Dette skyldes at rutenettet er grovt. Vi kan lage rutenettet finere, men vi ønsker egentlig ikke flere piler. Løsningen er i så fall å bruke forskjellig rutenett for `quiver` og `contour`, for eksempel

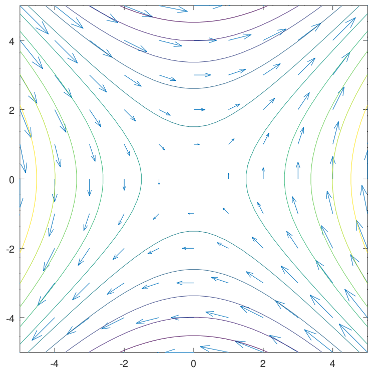
```
[x,y] = meshgrid(linspace(-5,5,40));
f = x.^2 + y.^2;
```



Eksempel: La $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$. Finn strømlinjene!

Vis at i dette tilfellet får vi løsning $x^2 - y^2 =$ konstant og $z =$ konstant, altså hyperbler som ligger i plan parallelle med xy-planet.

Vi kan modifisere skriptet ovenfor (det trengs kun å endre to fortegn) og få følgende figur:



Nok en gang er det behov for å bruke forskjellig oppløsning i rutenett for antall piler kan være forholdsvis lite samtidig som kurvene til konturplottet blir tilstrekkelig glatte.

Rotasjon som stivt legeme

Se GF kap. 2.4.2 og M kap. 1.3.1.

Vi sier at et legeme er stivt dersom innbyrdes avstand mellom materielle punkter forblir uendret. Rotasjon som stivt legeme betyr at de materielle punktene i legemet beholder sine innbyrdes avstander mens legemet som helhet roterer.

La omløpstiden være T, og la vinkelfarten være gitt ved $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La oss definere rotasjonsaksen ved høyrehåndsregelen: La de fire fingrene på høyre hånd bøye seg i rotasjonsretningen, da sier vi at tommelen peker i positiv retning langs rotasjonsaksen. La oss definere vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega}$ som en vektor med lengde $\frac{2\pi}{T}$ orientert i positiv retning langs rotasjonsaksen: $\boldsymbol{\omega}$ peker langs høyre tommel, rotasjonen går langs de fire andre fingrene på høyre hånd.

I det følgende lar vi origo ligge langs rotasjonsaksen. I så fall vil hastigheten til et punkt med posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ være

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Merk: Et punkt med radius $R = r \sin\theta$ fra rotasjonsaksen, hvor r er lengden til posisjonsvektor, $r = |\boldsymbol{r}|$, og θ er vinkelen mellom $\boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{\omega}$, skal tilbakelegge omkretsen $2\pi R$ i løpet av en tid T, $v = \frac{2\pi R}{T}$, dvs. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R}$.

Merk: Hastigheten $\boldsymbol{v}$ står normalt på posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ og normalt på rotasjonsaksen $\boldsymbol{\omega}$.

Posisjonsvektor er funksjon av tid $\boldsymbol{r}(t)$ og er løsning av differensiallikninga

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

Akselerasjonen til et punkt med posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ vil være

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\right).$$

Dersom vinkelhastigheten er konstant så er det kun posisjonsvektor som skal deriveres
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r} - \omega^2 \boldsymbol{r}.$$
Her har vi benyttet vektor-identiteten
$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Dersom $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{r}$, dvs. $\boldsymbol{r}$ står vinkelrett på rotasjonsaksen, så har vi
$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r}$$
som vi kan gjenkjenne som det vanlige uttrykket for sentripetalakselerasjon.

Eksempel: Vis at vektorfeltet vist ovenfor, $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$, er en rotasjon som stivt legeme med vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{k}$.

Definisjon av begrepet "nord"

Vi skal definere begrepet "nord" som en angivelse av en rotasjonsbevegelse:

> Legg de fire fingrene på høyre hånd langs rotasjonsbevegelsen, slik at høyre tommel peker i $\boldsymbol{\omega}$ sin retning. Da er tuppen på tommelen "nord".

Eksempel: Magnetisk nord for elektromagnet.
En elektromagnet lages ved å sende strøm gjennom en kveil av ledning. Dersom vi lar de fire fingrene på høyre hånd peke i retning av strømmen i ledningen, da vil tuppen på høyre tommel være magnetisk nord.

Eksempel: Hvilken vei roterer jorda rundt seg selv?
La høyre tommel peke mot Nordstjernen (også kalt Polarstjernen), da peker/krummer de fire fingrene på høyre hånd i rotasjonsretning.

Eksempel: Hvilken vei roterer jorda rundt sola?
Jordas rotasjon rundt sola, og jordas rotasjon rundt seg selv, er såkalt "prograd". Det vil si at de to rotasjonsbevegelsene begge har nord orientert i samme retning.

Dersom de to rotasjonsbevegelsene hadde hatt rotasjonsbevegelser med motsatt retning, dvs. med nord i motsatt retning, så hadde vi sagt at de var "retrograd".

Eksempel: Hvilken vei beveger vi oss når vi befinner oss på jorda, og hvilken vei er vi akselerert?
Hint: La origo være i jordas sentrum. La $\boldsymbol{r}$ være vår posisjonsvektor. Finn retningen til $\boldsymbol{\omega}$. Finn retningen til $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Finn retningen til $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$.
Hint: Vi er akselerert vinkelrett inn mot rotasjonsaksen til jorda.