Forelesning 5/2–2019 ved Karsten Trulsen

Rotasjon som stivt legeme

Repetisjon fra sist: Rotasjon som stivt legeme betyr at et sett med punkter som opprinnelig er i visse innbyrdes avstander fra hverandre vil fortsette å være i de samme innbyrdes avstandene fra hverandre mens de roterer.

Vinkelhastighetsvektor $\boldsymbol{\omega}$ er orientert langs rotasjonsaksen: La høyre tommel peke langs $\boldsymbol{\omega}$, så går rotasjonsbevegelsen slik som de andre fire fingrene på høyre hånd krummer seg. Dersom vi lar origo ligge langs rotasjonsaksen, så vil hastigheten til et punkt med posisjonsvektor $\boldsymbol{r}$ være

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Eksempel: Vis at $\boldsymbol{r}(t) = R(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\sin\omega t)$ er ei løsning for rotasjonsbevegelsen når $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$.

Vi må vise at $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$.

Den enkleste måten er å sette inn, på begge sider. Vi har

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = R\omega(-\boldsymbol{i}\sin\omega t + \boldsymbol{j}\cos\omega t)$$

og vi har

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\omega t & R\sin\omega t & 0 \end{vmatrix} = -R\omega\boldsymbol{i}\sin\omega t + R\omega\boldsymbol{j}\cos\omega t$$

og disse er åpenbart like.

Merk: Vi kunne også ha startet med $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ og løst denne som et koblet system av to første-ordens ordinære differensiallikninger. Alternativt kunne vi ha skrevet om systemet av to første-ordens ordineære differensiallikninger til ei andre-ordens differensiallikning. Du kan prøve å gjøre dette selv!

Hint: For å løse det koblede systemet av første-ordens differensiallikninger kan man gjette på løsningen $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{\alpha}\mathrm{e}^{\lambda t}$ hvor λ er en konstant skalar og $\boldsymbol{\alpha}$ er en konstant vektor. I så fall kan man vise at λ er en egenverdi og $\boldsymbol{\alpha}$ er tilhørende egenvektor til en viss matrise. For å forstå dette må man ha lest nesten hele kapittel 4 i LH.

Definisjon av begrepet "nord"

Vi skal definere begrepet "nord" som en angivelse av en rotasjonsbevegelse:

> Legg de fire fingrene på høyre hånd langs rotasjonsbevegelsen, slik at høyre tommel peker i $\boldsymbol{\omega}$ sin retning. Da er tuppen på tommelen "nord".

Dersom to samtidige rotasjonsbevegelser begge har "nord" orientert i samme retning sier vi at rotasjonene er "prograd", i motsatt fall sier vi at rotasjonene er "retrograd".

Eksempel: En person som står på en tradisjonell karusell vil beskrive en dobbel rotasjonsbevegelse som er "prograd", en person som sitter på et pariserhjul vil kun beskrive en enkel rotasjonsbevegelse, men hva med en person som lar seg drive rundt i en strømvirvel i Saltstraumen?

Nytt tema: Kurveintegral

Dette burde være kjent fra MAT1110.

Vi skal integrere et skalarfelt f eller et vektorfelt $\boldsymbol{F}$ langs en kurve γ. Langs kurven tenker vi oss infinitesimale kurveelementer $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, og vi forutsetter at kurven er tilstrekkelig glatt at det er fornuftig å tenke på kurveelementene $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ som tangenter til kurven. Kurven er orientert, dvs. den går fra et punkt til et annet i en gitt retning som er indikert ved retningen til $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Vi skal være interessert i å regne ut kurveintegraler av typen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \int_\gamma \boldsymbol{F}\times \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \int_\gamma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \int_\gamma f\,|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|, \qquad \text{etc.}$$

langs kurven γ. I det spesielle tilfellet at kurven starter og slutter på samme sted vil integralet være rundt en lukket kurve, da skriver vi gjerne en sirkel rundt integraltegnet

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \oint_\gamma \boldsymbol{F}\times \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \oint_\gamma f\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \oint_\gamma f\,|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|, \qquad \text{etc.}$$

Noen ganger, for eksempel for å implementere kurveintegraler på datamaskin, kan det være greit å tenke seg at kurven er delt opp i rette kurveelementer $\Delta\boldsymbol{r}_i$, og tilnærme kurveintegralet ved en sum over kurveelementene, for eksempel $\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i$. I grensen at $|\Delta\boldsymbol{r}|\to 0$ vil summen gå over til et integral, $\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i \to \int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

La kurven være parameterisert av en parameter t. Noen ganger kan vi tenke oss at parameteren er tiden som løper mens et punkt flytter seg langs kurven, andre ganger kan vi tenke oss at parameteren er avstanden tilbakelagt langs kurven, men parameteren trenger verken å være tid eller avstand. Når parameteren øker fra t til $t+\Delta t$ vil vi forflytte oss langs kurven $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \approx \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Delta t$. I grensen at $\Delta t \to 0$ blir forflytningen infinitesimal og vi skriver $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$. I det spesielle tilfellet at parameteren kan tolkes som tid, så beveger vi oss langs kurven med hastighet $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.

Eksempel: omkretsen til en sirkel med radius R

La kurven γ (altså sirkelen) være parametrisert ved vinkelen θ:

$$\boldsymbol{r}(\theta) = R\cos\theta\boldsymbol{i} + R\sin\theta\boldsymbol{j} \qquad \text{med} \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

Vi har

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-R\sin\theta\boldsymbol{i} + R\cos\theta\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}\theta$$

og

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \sqrt{R^2 \sin^2\theta + R^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = R\,\mathrm{d}\theta$$

og omkretsen blir

$$\oint_\gamma |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R.$$

Eksempel: arbeid = kraft ganger vei

Vi vet at for rettlinjet bevegelse $\Delta\boldsymbol{r}$ med konstant kraft $\boldsymbol{F}$ så vil arbeidet utført av krafta være $W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}$.

De fysiske enhetene er følgende: Arbeid kan måles i Joule ($\mathrm{J} = \mathrm{N\ m} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$), kraft kan måles i Newton ($\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}}$) og vei kan måles i meter (m). Legg merke til at vi har $\mathrm{J} = \mathrm{N\ m}$.

Dersom krafta ikke er konstant, eller veien ikke er rett, så vil uttrykket for arbeid bli uttrykt ved kurveintegralet

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

To spørsmål om kurveintegraler

Dersom vi skal beregne et kurveintegral som starter i et punkt $\boldsymbol{r}_0$ og ender opp i et annet punkt $\boldsymbol{r}_1$, så kan det være mange veier for å komme seg fra $\boldsymbol{r}_0$ til $\boldsymbol{r}_1$, og det kan være mange måter å parameterisere hver vei. To spørsmål dukker da opp:

- Gir forskjellige parameteriseringer av samme vei samme svar?
- Gir forskjellige veier samme svar?

Det første spørsmålet er besvart av LH setning 3.3.6 for skalarfelt, og 3.4.5 for vektorfelt, som sier at to parameteriseringer av samme kurve skal gi samme svar for kurveintegralet. Vi skal straks gi et eksempel som viser hvor viktig det er at forutsetningene for å bruke disse setningene må være oppfyllt!

Eksempel: La $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, og la γ være x-aksen fra $x = 0$ til $x = 2$, regn ut $\int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}$.

Parameterisering 1: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i}$ for $0 \le t \le 2$
Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{v} = t\boldsymbol{i}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^2 t\,\mathrm{d}t = 2$.

Parameterisering 2: $\boldsymbol{r}(t) = 2t^2\boldsymbol{i}$ for $0 \le t \le 1$
Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 4t\boldsymbol{i}\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{v} = 2t^2\boldsymbol{i}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^1 8t^3\,\mathrm{d}t = 2$.

At vi fikk samme svar stemmer med LH setning 3.4.5.

Merk: I eksemplet over er ikke vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ hastigheten som vi beveger oss med i henhold til parametriseringen $\boldsymbol{r}(t)$ av kurven γ.

Eksempel: La $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ og la γ være halvsirkelen med sentrum i $(x = 1, y = 0)$ fra origo til $(x = 2, y = 0)$ i øvre halvplan. Dette er samme vektorfelt som ovenfor, og samme start- og endeunkt for integralet, men kurven går langs en annen vei.

Vi velger parameteriseringen $\boldsymbol{r}(t) = (1 - \cos t)\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}$ for $0 \leq t \leq \pi$.

Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{v} = (1 - \cos t)\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^\pi \sin t \, \mathrm{d}t = 2$.

I de to foregående eksemplene har vi sett at samme vektorfelt $\boldsymbol{v}$ kan gi samme verdi for kurveintegralet mellom to punkter selv om vi har valgt forskjellig vei mellom de to punktene.

Eksempel: Friksjonskraft

Friksjon forsøker å bremse en bevegelse, følgelig forventer vi at friksjonskraft er rettet motsatt hastigheten. Det er vanlig at friksjonskrafta øker med hastigheten. Den enkleste modellen for friksjonskraft er at den er proporsjonal med hastigheten, la oss anta formelen $\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v}$ hvor $\mu > 0$ er en friksjonskoeffisient og $\boldsymbol{v}$ er hastigheten vi beveger oss med.

Dersom vi skal studere friksjonskraft vil det være naturlig å velge tiden t som parameter for parametriseringen $\boldsymbol{r}(t)$ av banen eller kurven γ som vi skal bevege oss langs. Hastigheten er $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, derfor har vi at $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$.

Eksempel: Regn ut arbeidet som friksjonskrafta $\boldsymbol{F} = -\mu\boldsymbol{v}$ gjør for rettlinjet bevegelse med konstant hastighet langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = L$

La oss anta at vi forflytter oss en avstand L i løpet av en tid T med konstant hastighet. Vi kan skrive hastigheten som $\boldsymbol{v} = \frac{L}{T}\boldsymbol{i}$. Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$, og arbeidet blir

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^T -\mu v^2 \, \mathrm{d}t = -\mu\frac{L^2}{T}$$

Svaret forteller oss at arbeidet avhenger av tiden vi bruker på å flytte oss den gitte avstanden. Jo fortere vi beveger oss, jo kortere tid bruker vi, og jo større blir arbeidet.

En praktisk anvendelse er at dersom du øker hastigheten til bilen din, så kan du forvente å bruke mer drivstoff, fordi arbeidet som gjøres av friksjonskrefter vil øke!

Er dette resultatet i strid med LH sats 3.4.5? Kurveintegralet ser jo ut til å avhenge av parametriseringen langs den samme kurven?

Svaret er at LH sats 3.4.5 ikke gjelder i dette tilfellet fordi friksjonskraft ikke er en entydig funksjon av posisjon, fordi den avhenger av hvordan bevegelsen skjer. I dette tilfellet er parametriseringen et uttrykk for hvordan bevegelsen skjer.

For å unngå slike problemer har vi valgt å avgrense definisjonen av et felt til å være en entydig funksjon av posisjon. Friksjon, Coriolis-kraft og Lorenz-kraft er ikke entydige funksjoner av posisjon fordi de avhenger av hvordan en bevegelse skjer.

LH sats 3.3.6/3.4.5 gjelder for felt, men friksjonskraft er altså ikke et felt i henhold til vår avgrensning.