Forelesning 8/2–2019 ved Karsten Trulsen

Husk fra sist våre to spørsmål om kurveintegraler:

Dersom vi skal beregne et kurveintegral som starter i et punkt $\boldsymbol{r}_0$ og ender opp i et annet punkt $\boldsymbol{r}_1$, så kan det være mange veier for å komme seg fra $\boldsymbol{r}_0$ til $\boldsymbol{r}_1$, og det kan være mange måter å parameterisere hver vei. To spørsmål dukker da opp:

- Gir forskjellige parameteriseringer av samme vei samme svar?
- Gir forskjellige veier samme svar?

Det første spørsmålet er besvart av LH setning 3.3.6 for skalarfelt, og 3.4.5 for vektorfelt, som sier at to parameteriseringer av samme kurve skal gi samme svar for kurveintegralet.

Vi så imidlertid et eksempel som tydelig viser hvor viktig det er at forutsetningene for å bruke disse setningene må være oppfyllt: Arbeidet utført av friksjonskraft avhenger av hvordan bevegelsen skjer. Dersom parametriseringen av veien er en beskrivelse av hvordan bevegelsen skjer, og ettersom friksjonskraften avhenger av hvordan bevegelsen skjer, så vil ikke arbeidet som friksjonskraften utfører være uavhengig av parametriseringen. Problemet er altså at friksjonskraft ikke er entydig funksjon av posisjon fordi den avhenger av hvordan en bevegelse skjer.

For at LH sine to satser skal gjelde må vi insistere på at det vi integrerer er entydige funksjoner av posisjon. Vi må altså være forsiktig med å bruke LH sine satser på friksjonskraft, Coriolis kraft og Lorenz kraft (krafta som virker på en elektrisk ladning som beveger seg i et magnetfelt).

Eksempel: Kurveintegralet langs to forskjellige veier kan gi forskjellig svar.

La $\boldsymbol{v} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ og la oss integrere fra $(x = 1, y = 0)$ til $(x = -1, y = 0)$ langs to forskjellige veier:

Vei 1: x-aksen fra $x = 1$ til $x = -1$. Velg parameterisering $\boldsymbol{r}(t) = -t\boldsymbol{i}$ for $-1 \le t \le 1$.

Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{i}\mathrm{d}t$ og $\boldsymbol{v} = -t\boldsymbol{j}$, og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$.

Vei 2: Halvsirkelen med sentrum i origo i øvre halvplan $(y \ge 0)$. Velg parameterisering $\boldsymbol{r}(t) = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$ for $0 \le \theta \le \pi$.

Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})\mathrm{d}\theta$ og $\boldsymbol{v} = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}$ og følgelig $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^\pi \sin^2\theta + \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \pi$.

I dette eksemplet har vi sett at ett og samme vektorfelt kan gi forskjellig verdi for kurveintegralet mellom de samme to punktene for ulike veier mellom punktene.

Definisjon av sirkulasjon

Sirkulasjonen til et vektorfelt $\boldsymbol{v}$ rundt en lukket kurve γ er gitt ved kurveintegralet

$$C = \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Sirkelen rundt integraltegnet indikerer at γ er en lukket kurve.

Definisjon av "konservativt" vektorfelt

Vi har den noe spesielle situasjonen at våre tre lærebøker har hver sin måte å definere hva vi mener med et "konservativt" vektorfelt:

(I) M (s.28): $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom sirkulasjonen $\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ er lik null for en <u>vilkårlig</u> lukket kurve γ.

(II) GF (s.100): $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom kurveintegralet mellom to punkter er uavhengig av veien mellom punktene, $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, hvor γ_1 og γ_2 er to forskjellige og <u>vilkårlig</u> kurver som går mellom samme start- og sluttpunkt.

(III) LH (s.202): $\boldsymbol{F}$ er konservativ dersom den kan skrives som gradienten til et skalarfelt, $\boldsymbol{F} = \nabla\phi$. Vi sier da at ϕ er et skalarpotensial.

Disse tre utsagnene er ekvivalente, og snart skal vi føye til et fjerde utsagn som også er ekvivalent, nemlig at vektorfeltet er virvelfritt.

La oss vise at (I) er ekvivalent med (II): Velg to punkter A og B, legg en vilkårlig lukket kurve γ gjennom disse to punktene, splitt den lukkede kurven opp i to deler γ_1 og γ_2 som begge har endepunkter A og B således at γ er γ_1 etterfulgt av $-\gamma_2$. Vi har

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_{\gamma_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \oint_{\gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Dersom sirkulasjonen rundt en vilkårlig lukket kurve er lik null (venstre side er lik null), så er de to integralene på høyre side like. Da er altså kurveintegralet uavhengig av vei. Motsatt har vi at dersom kurveintegralene på høyre side er like, altså at kurveintegralet er uavhengig av vei, så er sirkulasjonen rundt den lukkede kurven lik null.

La oss vise at (III) impliserer (II): La oss si vi skal integrere langs en kurve som går fra punkt A til punkt B, og vi antar at det finnes et skalarpotensial ϕ, i så fall har vi

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \mathrm{d}\phi = \phi|_A^B = \phi|_B - \phi|_A$$

Legg merke til at vi har brukt formelen for totalt differensial $\nabla\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\phi$. Følgelig ser vi at resultatet kun avhenger av endepunktene og ikke veien mellom endepunktene.

La oss vise at (II) impliserer (III): I dette tilfellet antar vi at integralet mellom to punkter er uavhengig av veien, og vi skal vise at det i så fall eksisterer et skalarpotensial. Vi lar oss i så fall inspirere av utledningen i M kapittel 3.2.1 hvor de konstruerer et skalarpotensial ved et kurveintegral

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

hvor vi står fritt til å velge integrasjonsveien fra origo $\mathbf{0}$ til det vilkårlige punktet $\boldsymbol{r}$ fordi (II) forutsetter nettopp at kurveintegralet er uavhengig av vei. Det eneste som gjenstår er å vise at gradienten av ϕ er lik $\boldsymbol{F}$:

La oss skrive $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$. I det følgende viser vi at $\frac{\partial\phi}{\partial x} = F_x$, tilsvarende beregninger kan gjøres for de to andre partiellderiverte: La oss splitte opp veien fra origo til $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ i tre rette linjestykker: γ_z går fra $(0,0,0)$ til $(0,0,z)$, γ_y går fra $(0,0,z)$ til $(0,y,z)$, og γ_x går fra $(0,y,z)$ til (x,y,z). Vi kan da skrive kurveintegralet

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \int_0^z F_z(0,0,t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y F_y(0,t,z)\,\mathrm{d}t + \int_0^x F_x(t,y,z)\,\mathrm{d}t$$

Nå er det lett å se at $\frac{\partial\phi}{\partial x} = F_x(x,y,z)$.

For å regne ut de to andre partiellderiverte lønner det seg å velge andre integrasjonsveier. Prøv å gjøre det selv!

Merk: Tradisjonelt liker fysikere å definere skalarpotensial med et minustegn, mens matematikere liker å utelate minustegnet. Det er vanlig å introdusere kraftpotensial $\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$ og elektrisk potensial $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ med minustegn, og hastighetspotensial $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ med plusstegn. Her er $\boldsymbol{F}$ kraftfelt og $\boldsymbol{E}$ er elektrisk felt og $\boldsymbol{v}$ er hastighetsfelt og ϕ er i hvert tilfelle det tilhørende skalarpotensialet.

Eksempel: Er tyngdekraften $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ konservativ?

Her er m en masse som er utsatt for tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$. Her skal vi ta den enkleste representasjonen av tyngdekraft, nemlig at tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ er konstant innenfor et avgrenset område.

La oss prøve GF sin definisjon: Skriv først $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{k}$ hvor x og y-aksene er horisontale og z-aksen peker vertikalt oppover. La γ være en kurve fra et punkt $\boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ til et punkt $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$. Vi trenger ikke parameterisere kurven i det hele tatt, vi trenger kun å bruke $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\mathrm{d}x + \boldsymbol{j}\mathrm{d}y + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z$, som gir $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{z_0}^{z_1} -mg\,\mathrm{d}z = mg(z_0 - z_1)$.

Kurveintegralet avhenger kun av start- og sluttpunkt, følgelig vet vi at tyngdekraften $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ er konservativ.

Eksempel: Er tyngdekraften i Newtons gravitasjonslov konservativ?

Newtons gravitasjonslov sier

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\boldsymbol{i}_r$$

hvor m og M er massene til to legemer, r er avstanden mellom legemene, $\boldsymbol{i}_r$ er enhetsvektor i retning fra legemet med masse M til legemet med masse m, G er den universelle gravitasjonskonstanten, og $\boldsymbol{F}$ er tyngdekraften som virker fra legemet med masse M på legemet med masse m.

La oss sette $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, og $\boldsymbol{i}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$. Vi har

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{i}_r$$

og følgelig har vi

$$\boldsymbol{F} = -\nabla \left(-\frac{GmM}{r} \right)$$

Ettersom tyngdekraften kan uttrykkes ved et skalarpotensial vet vi at den er konservativ. Det som står inni parentesen kalles for tyngdepotensialet.