Forelesning 12/2–2019 ved Karsten Trulsen

Litt mer om kurveintegraler og konservative felt

Eksempel: Er friksjonskraft konservativ?

Friksjon forsøker å breme en bevegelse. Den enkleste modellen for friksjonskraft er at den er proporsjonal med og motsatt rettet hastigheten. La oss anta formelen $\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}$ hvor $\mu > 0$ er en friksjonskoeffisient og $\boldsymbol{v}$ er hastigheten.

For å undersøke om denne friksjonskraften er konservativ kan vi prøve M sin definisjon: Regn ut sirkulasjonen for en vilkårlig lukket kurve.

La oss velge tiden t som parameter, og en parametrisering $\boldsymbol{r}(t)$ som representerer vår posisjon under bevegelsen rundt en lukket kurve γ. Hastigheten er $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, derfor har vi at $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$. Sirkulasjonsintegralet blir

$$\oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int -\mu |\boldsymbol{v}|^2 \,\mathrm{d}t < 0.$$

Sirkulasjonen vil alltid være negativ fordi integranden er negativ for enhver bevegelse, følgelig ser vi at denne friksjonskraften ikke er konservativ!

Merk: Tidligere viste vi at friksjonskraft er mer problematisk enn som så, fordi den ikke er en entydig funksjon av posisjon, den avhenger av hvordan bevegelsen skjer. Dersom vi lar parametriseringen av kurven reflektere hvordan bevegelsen skjer så vil altså kurveintegralet avhenge av parametriseringen.

For å unngå at dette skal skape forvirring kan vi avgrense definisjonen av et felt til å være en entydig funksjon av posisjon.

LH sats 3.4.5 gjelder ikke i dette tilfellet fordi friksjonen ikke er et felt, friksjonen er ikke en entydig funksjon av posisjon, friksjonen avhenger av hvordan vi beveger oss.

Et eksempel som er litt mer utfordrende: (Pass opp for singulariteter!)

La oss undersøke om vektorfeltet

$$\boldsymbol{v} = \frac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$$

er konservativt.

Først kan vi undersøke om feltet $\boldsymbol{v}$ er gradienten til et skalapotensial ϕ. Det viser seg at dersom vi lar ϕ være vinkelen mellom x-aksen og posisjonsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ så er ϕ et skalarpotensial for $\boldsymbol{v}$. Vi kan vise dette ved å regne ut de partiellderiverte $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ og $\frac{\partial \phi}{\partial y}$.

Hint: Husk at den deriverte av arcus tangens er $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \arctan \alpha = \frac{1}{1+\alpha^2}$.

Deretter kan vi undersøke om sirkulasjonen av $\boldsymbol{v}$ langs en vilkårlig lukket kurve γ er lik null. La kurven være en sirkel rundt origo. Velg for eksempel sirkelen med radius lik 1 og sentrum i origo, med parametrisering $\boldsymbol{r}(\theta) = \cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j}$ for

$0 \le \theta \le 2\pi$. Vi har $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})\,\mathrm{d}\theta$ og $\boldsymbol{v} = \frac{-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$ og følgelig

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

Det faktum at feltet $\boldsymbol{v}$ har et skalarpotensial tyder på at det er konservativt, men det faktum at sirkulasjonen rundt origo er ulik null tyder på at feltet ikke er konservativt!

Løsningen på dette mysteriet er å legge merke til at origo er et singulært punkt. Vi kan ikke tillate singulære punkt innenfor den lukkede kurven til sirkulasjonsintegralet når vi skal anvende kriteriet for konservativt felt.

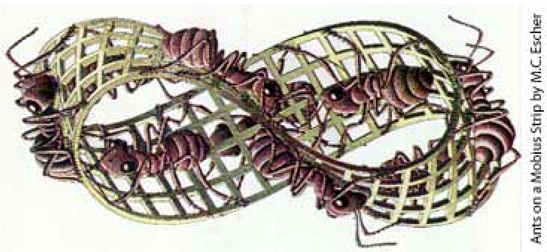
Tilsvarende legger vi merke til at vinkelen ϕ ikke er entydig definert dersom vi går helt rundt origo. Vi må begrense variasjonene i vinkelen slik at den holder seg entydig definert når vi skal anvende kriteriet for konservativt felt. Dette kan gjøres ved å lage et "kutt" i planet, fra origo og utover, og ikke tillate at integrasjonskurven γ krysser "kuttet".

Feltet er følgelig konservativt på betingelse av at vi holder oss innenfor et avgrenset område som ikke inkluderer eller omslutter det singulære punktet i origo.

Flateintegral

(M 2.3, se også LH 6.1–4)

Vi skal integrere et skalarfelt f eller et vektorfelt $\boldsymbol{F}$ over en flate S. Langs flaten tenker vi oss infinitesimale flateelementer $\mathrm{d}\sigma$ og tilhørende enhetsnormalvektorer $\boldsymbol{n}$. Vi forutsetter at flaten er tilstrekkelig glatt at det er fornuftig å tenke på flatenormalvektoren $\boldsymbol{n}$ som normalt på flaten og flateelementet $\mathrm{d}\sigma$ som tangent til flaten. Vi forutsetter også at flatenormalvektoren er orientert i henhold til problemstillingen vi betrakter, dette krever at flaten er orienterbar. En flate er orienterbar dersom det går an å male hver side av flaten med forskjellige farger. Noen flater er ikke orienterbare, for eksempel Möbius båndet her illustrert av M. C. Escher:



(sjekk hvordan maurene kryper rundt Möbiusbåndet)

Vi skal være interessert i å regne ut flateintegraler av typen

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma, \qquad \int_S \boldsymbol{F}\times\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma, \qquad \int_S f\,\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma, \qquad \int_S f\,\mathrm{d}\sigma, \qquad \text{etc.}$$

over flaten S.

Noen ganger kan det være greit å tenke seg at flaten er delt opp i plane flateelementer med areal $\Delta\sigma_i$ med tilhørende normalvektorer $\boldsymbol{n}_i$, og tilnærme flateintegralet ved en sum over flateelementene, for eksempel $\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{n}_i \Delta\sigma_i$. I grensen at alle $\Delta\sigma_i \to 0$ vil summen gå over til et integral, $\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{n}_i \Delta\sigma_i \to \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma$.

Eksempel: Arealet av et rektangel med sidekanter a og b

La rektanglet være orientert med sidekant a langs x-aksen og sidekant b langs y-aksen. La oss betrakte det infinitesimale flateelementet i kartesiske koordinater $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, og la oss ta x-integralet først:

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^b \int_0^a \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^b [x]_{x=0}^a\,\mathrm{d}y = \int_0^b a\,\mathrm{d}y = [ay]_0^b = ab$$

I dette tilfellet hadde det vært like enkelt å bytte på rekkefølgen:

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^a \int_0^b \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^a [y]_{y=0}^b\,\mathrm{d}x = \int_0^a b\,\mathrm{d}x = [bx]_0^a = ab$$

Eksempel: Arealet mellom x-aksen og kurven $y = \sin x$

Regn dette ut for $0 \leq x \leq \pi$. La oss betrakte det infinitesimale flateelementet i kartesiske koordinater $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, og la oss ta y-integralet først:

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi \int_0^{\sin x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi [y]_{y=0}^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

I dette tilfellet er det betydelig mye vanskeligere å bytte på rekkefølgen:

$$\int_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 [x]_{x=\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi - 2\arcsin y\,\mathrm{d}y$$
$$= \left[\pi y - 2y\arcsin y - 2\sqrt{1-y^2}\right]_0^1 = 2$$

Det lønner seg altså å velge en rekkefølge som er enkel å håndtere.

Eksempel: Volumfluks — strømingen i ei elv gjennom snitt på tvers

Ei elv har konstant hastighet $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}$ i x-retning, og tverrsnitt S normalt på x-aksen med konstant areal A. Finn volumfluksen $Q = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma$.

Først bestemmer vi at flatenormalvektoren skal være orientert i positiv x-retning, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}$. Så bemerker vi at $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Deretter regner vi ut

$$Q = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \int_S v\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} \mathrm{d}\sigma = v \int_S \mathrm{d}\sigma = vA$$

hvor vi benyttet at v er konstant så den kunne settes utenfor integralet.

Grunnen til at dette kalles volumfluks innser vi ved å skjekke de fysiske enhetene: $v \sim$ m/s, $\mathrm{d}\sigma \sim \mathrm{m}^2$, enhets normalvektor $\boldsymbol{n}$ er dimensjonsløs, og følgelig $Q \sim \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$, hvor symbolet $\sim$ betyr "har enhet". Dette er en fornuftig enhet for volumfluks.

Eksempel: Volumfluks — strømingen i ei elv gjennom snitt på skrå
Vi fortsetter å betrakte samme elv med samme konstante hastighet $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}$ i x-retning, men nå lar vi tverrsnittet S stå på skrå med vinkel θ i forhold til y-aksen på tvers av elva. Finn volumfluksen $Q = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma$.

Først må vi bestemme flatenormalvektoren, som vi ønsker skal ha positiv komponent i x-retning. Det er flere måter å gjøre dette, her skisserer vi to alternativer:

Alternativ 1: Vi kan beskrive tverrsnittet som en ekviskalarflate. Vi har $\tan\theta = \frac{x}{y}$ og derfor kan tverrsnittet beskrives som ekviskalarflaten $\beta(x, y, z) = x\cos\theta - y\sin\theta = 0$. Gradienten til skalarfunksjonen er $\boldsymbol{n} = \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|} = \cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j}$.

Alternativ 2: Vi kan introdusere en tangentvektor på skrå over elva $\boldsymbol{t} = \cos\theta\boldsymbol{j} + \sin\theta\boldsymbol{i}$, og finne normalvektor til den skrå flaten ved å ta kryssproduktet med enhetsvektor i vertikal z-retning $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{k} = \cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j}$.

Vi ser at arealet til det skrå tverrsnittet er $A/\cos\theta$ (vi kan tenke oss det skrå tverrsnittet som en hypotenus og det vinkelrette tverrsnittet som en katet).

Til slutt regner vi ut volumfluksen gjennom det skrå tverrsnittet

$$Q = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \int_S v\boldsymbol{i} \cdot (\cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j}) \mathrm{d}\sigma = v\cos\theta \int_S \mathrm{d}\sigma = (v\cos\theta)\frac{A}{\cos\theta} = vA$$

hvor vi benyttet at v og $\cos\theta$ er konstant så de kunne settes utenfor integralet.

Vi fikk samme svar som tidligere! Det burde ikke være overraskende at det ikke renner mer vann gjennom et skrått tverrsnitt enn gjennom et vinkelrett tverrsnitt. Dette understreker et viktig prinsipp: Det er normalkomponenten til strømningen gjennom en flate som gir bidrag til gjennomstrømningen.

Begrepene fluks, flukstetthet og integrert fluks
Generelt sier vi at integraler av typen

$$Q = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma$$

er fluks-integraler. Ordet "fluks" kommer fra latin og betyr "strømning". Størrelsen Q kan vi kalle "integrert fluks", og størrelsen $\boldsymbol{F}$ kan vi kalle "flukstetthet". Her er flukstettheten en vektor-størrelse mens den integrerte fluksen er en skalar.

La oss sjekke de fysiske enhetene: Det infinitesimale flateelementet $\mathrm{d}\sigma$ er et areal. Enhetsnormalvektoren $\boldsymbol{n}$ er dimensjonsløs. Følgelig må den fysiske enheten til flukstetthet være lik den fysiske enheten til integrert fluks delt på areal.

Hva slags størrelse skal vi assosiere med ordet "fluks" alene, integrert fluks Q eller flukstetthet $\boldsymbol{F}$? Dessverre har forskjellige fagområder hver sin tradisjon. I elektromagnetisme er det vel etablert at ordet "fluks" referer til "integrert fluks". For anvendelser innen transportfenomener, for eksempel fluidmekanikk, er det vanlig at ordet "fluks" refererer til "flukstetthet".

For å gjøre forvirringen komplett finner vi dessuten lett tekster som bruker begrepet "fluks" uten å gjøre en slik distinksjon. Se for eksempel LH (2. utgave 2015): I kapittel 6.12 står det i avsnittet midt på side 678 først at $\boldsymbol{F}$ er en fluks, og like etterpå står det at $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}R$ er en fluks, hvor R er arealet til en flate som $\boldsymbol{F}$ strømmer igjennom. Definisjon 6.12.1 på side 680 sier at integralet $\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma$ (oversatt til vår notasjon) er en fluks. LH benytter altså begrepet "fluks" som fellesbegrep for de to begrepene "integrert fluks" og "flukstetthet".

Kanskje opphavsmannen til denne forvirringen er James Clerk Maxwell som skrev i sin bok "Treatise on Electricity and Magnetism" i 1892:

> In the case of fluxes, we have to take the integral, over a surface, of the flux through every element of the surface. The result of this operation is called the surface integral of the flux. It represents the quantity which passes through the surface.

Her referer ordet "fluks" til "flukstetthet", det er merkelig ettersom Maxwell bidro betydelig til å etablere elektromagnetisme som fag. Se forøvrig utmerket diskusjon om terminologi på Wikipedia: Flux.

For å unngå forvirring kan vi si enten "integrert fluks" eller "flukstetthet" når det er viktig å skille mellom begrepene, og vi kan begrense bruken av kun ordet "fluks" til situasjoner det ikke spiller noen rolle hvilket av begrepene vi refererer til.