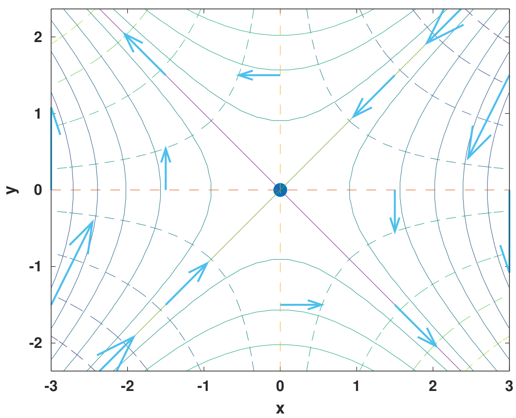
Fasit for avsluttende eksamen i MEK1100 gitt 5 juni 2019

Oppgave 1

1a

Strømfunksjon $\psi = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c_1$.
Potensial $\phi = -xy + c_2$.
Motsatt fortegn kan også være akseptabelt, avhengig av definisjon.

1b



Oppgave 2

Varmeflukstettheten er $\boldsymbol{H} = k\alpha T_0 \dfrac{|x|}{x} \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\boldsymbol{i}$ for $x \neq 0$. Denne peker vekk fra origo.

Den tidsderiverte av temperaturen er $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \kappa\alpha^2 T_0 \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$ for $x \neq 0$. Denne er positiv for $x \neq 0$, så temperaturen stiger i tid overalt utenom origo.

Oppgave 3

3a

Divergens $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = -\dfrac{v_0}{r}$.

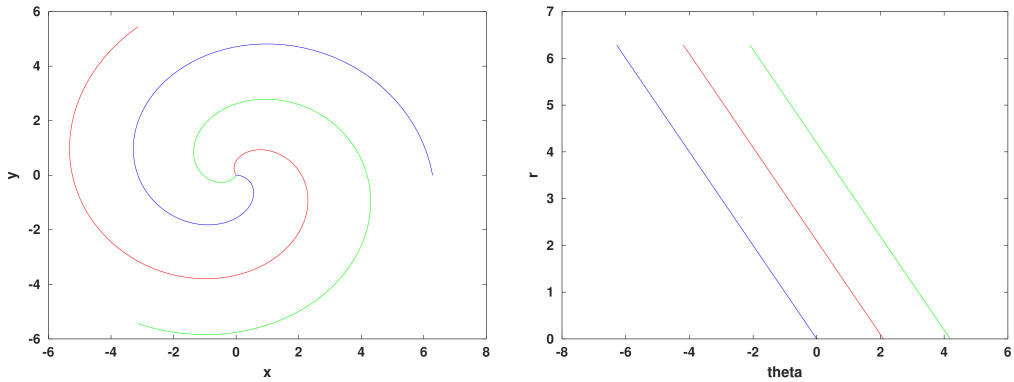
3b

Virvling $\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\omega\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{\omega}$.

3c

Hastighetsfeltet har ikke en strømfunksjon fordi det ikke er divergensfritt.

Strømlinjene finnes ved formelen $\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Vi får $(\omega r\boldsymbol{i}_\theta - v_0\boldsymbol{i}_r) \times (\boldsymbol{i}_r\mathrm{d}r + \boldsymbol{i}_\theta r\mathrm{d}\theta + \boldsymbol{k}\mathrm{d}z) = \boldsymbol{i}_r(\omega r\mathrm{d}z) + \boldsymbol{i}_\theta(v_0\mathrm{d}z) - \boldsymbol{k}(\omega r\mathrm{d}r + v_0 r\mathrm{d}\theta) = \boldsymbol{0}$ som gir $z =$ konstant og $\left\{ r = 0 \text{ eller } r = -\dfrac{v_0\theta}{\omega} + \text{ konstant } \right\}$. Dersom dette skisseres i xy-planet så er det spiraler inn mot origo $r = 0$. Dersom dette skisseres i $r\theta$-planet så er det rette skrå parallelle linjer ned til $r = 0$.



3d

Lokalderivert

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

Konvektivt derivert

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\omega^2 r \boldsymbol{i}_r - 2\omega v_0 \boldsymbol{i}_\theta$$

Personen vil altså bli akselerert både inn mot sentrum og motsatt rettet rotasjonsretningen. Hun vil derfor føle at hun blir kastet både utover og framover i karusellens rotasjonsretning.

3e

Sirkulasjonen er lik $2\pi\omega R^2$.

Motsatt fortegn kan også være akseptabelt, avhengig av orienteringen til den lukkede kurven.

Samme svar med Stokes sats.

3f

Integrert fluks $-2\pi v_0 Rh$.

Samme svar med Gauss sats.

Oppgave 4

Normalvektor og flateelement $\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \left(2\frac{hx}{a^2}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ dersom man parameteriserer med x og y, eller $\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \left(\boldsymbol{i} - \frac{a}{2\sqrt{hz}}\boldsymbol{k}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dersom man parameteriserer med y og z. Dette er ikke de eneste måtene å parameterisere på.

Trykkraft fra vannet på demningen

$$\boldsymbol{F} = \int_{\text{demning}} p\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = bh(p_0 + \frac{1}{2}\rho gh)\boldsymbol{i} - ab(p_0 + \frac{2}{3}\rho gh)\boldsymbol{k}$$

Oppgaven kan også løses ved å se på kraftbalansen på et kontrollvolum avgrenset av demningen, vannoverflaten, og et vertikalt plan. Dette er ekvivalent med å anvende Gauss sats, krever ikke å finne normalvektor eller flateelement til demningen, gir samme svar, og gir selvfølgelig full uttelling på eksamen.